EXAMEN SCHAKELCURSUS MIDDELBARE LASTECHNIEK WISKUNDE 2010

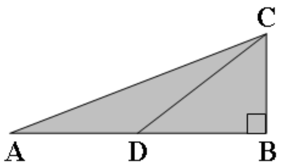
Datum: 13 januari 2010 Aantal opgaven: 6 Beschikbare tijd: 100 minuten
De maximale score is 90 punten, vooraf 10 punten: totaal 100 punten.
Aantal te behalen punten staat tussen haakjes voor de vraag.

Antwoorden zonder uitleg en/of berekening worden niet gehonoreerd!

Opgave 1

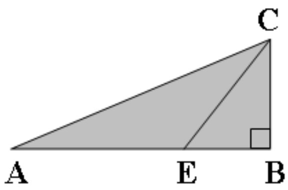
Voor driehoek ABC geldt: zijde a = 5 cm, zijde c = 12 cm en $\angle\beta = 90^\circ$.

(3) a) Bereken zijde b en de hoeken α en γ van de driehoek.



De zwaartelijn z uit C snijdt zijde AB in het punt D.

(3) b) Bereken de oppervlakte van de driehoeken ADC en DBC.



De hoekdeellijn d uit C snijdt zijde AB in het punt E.

(6) c) Bereken de oppervlakte van de driehoeken AEC en EBC.

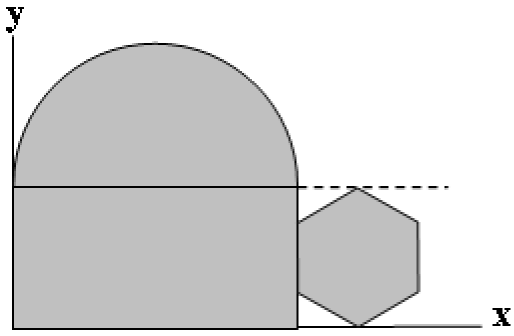
Opgave 2

Van de massieve vorm hieronder (halve cirkel, rechthoek en regelmatige zeshoek) willen we de coördinaten van het zwaartepunt ten opzichte van de x-as en y-as berekenen.
De rechthoek heeft een breedte van 12 cm en een hoogte van 6 cm.

(3) a) Bereken de oppervlakte van de zeshoek.

(5) b) Bereken de x-coördinaat van het zwaarte-punt van de zeshoek.

(10) c) Bereken de coördinaten van het zwaarte-punt ten opzichte van de x-as en y-as van de massieve vorm.



Opgave 3

Op het beginpunt van een logarithmische schaal ligt de waarde 30.
De waarde 800 ligt 15 cm naar rechts.

(5) a) Welke waarde hoort bij een punt op de schaal dat op 7 cm van het beginpunt ligt?
(5) b) Op hoeveel cm van het beginpunt ligt een punt met de waarde 80?
(5) c) Op hoeveel cm van het beginpunt ligt een punt met de waarde 1500?

Opgave 4

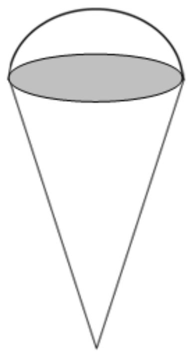
(5) a) Isoleer de variabele B uit de formule $Q = A^2 + B \cdot C$

(5) b) Isoleer de variabele B uit de formule $R^4 = \dfrac{0{,}24 \cdot C}{B}$

(5) c) Los het volgende vergelijkingenstelsel S(p,q) op:

$$\begin{cases} -5p + 2q = -1 \\ 4p - 3q = -2 \end{cases}$$

Opgave 5

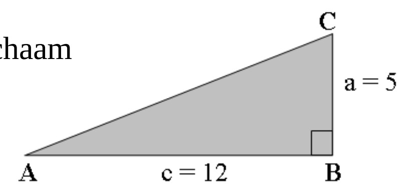


Een tol bestaat uit een kegel en een halve bol
De hoogte van de kegel is 20 cm.
De straal van de halve bol is 5 cm.

(3) a) Bepaal het oppervlak van de kegelmantel.
(2) b) Bereken het oppervlak van de halve bol.
(5) c) Bereken het volume van de halve bol.
(5) d) Bereken het volume van de totale tol.

Opgave 6

Voor driehoek ABC geldt: $\angle\beta = 90°$, zijde a = 5 cm en zijde c = 12 cm



(4) a) Bereken de totale oppervlakte van het omwentelingslichaam als we de driehoek wentelen om **zijde AB**.
(4) b) Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam als we de driehoek wentelen om **zijde BC**.
(7) c) Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam als we de driehoek wentelen om de schuine **zijde AC**.

EINDE EXAMEN

Formuleblad schakelcursus wiskunde

Goniometrie en trigonometrie

Rechthoekige driehoeken: SOSCASTOA

Willekeurige driehoeken: sinusregels en cosinusregels

sinusregels: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$; $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$; $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

cosinusregels $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$

Omtrek

$O_{cirkel} = 2 \cdot \pi \cdot R$ of $O_{cirkel} = \pi \cdot d$

Oppervlak

$A_{driehoek} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ of $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$ of $\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta$ of $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$

$A_{parallellogram} = b \cdot h$ of $a \cdot b \cdot \sin\gamma$ waarbij γ de ingesloten hoek is van de zijden a en b.

$A_{trapezium} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + b)$ waarbij a en b de lengten van de evenwijdige zijden zijn.

$A_{cirkel} = \pi \cdot R^2$ of $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2$ $A_{ellips} = \pi \cdot a \cdot b$ $A_{cirkelsector} = {}^{\alpha}/_{360} \cdot \pi \cdot R^2$

$A_{cirkeldriehoek} = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin\alpha$ $A_{bol} = 4 \cdot \pi \cdot R^2$ $A_{kegelmantel} = \pi \cdot R \cdot a$

Volume

$V = A_g \cdot h$ voor lichamen waarvan de opstaande ribben gelijk en evenwijdig zijn.

$V = {}^{1}/_{3} \cdot A_g \cdot h$ voor lichamen waarvan de opstaande ribben in één punt samen komen.

$V_{bol} = {}^{4}/_{3} \cdot \pi \cdot R^3$

Zwaartepunt

$Y_{Z(driehoek)} = \frac{1}{3} \cdot h$ $Y_{Z(halve\ cirkel)} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$ $A_{tot} x_Z = \sum A_i x_{iz}$ $A_{tot} y_Z = \sum A_i y_{iz}$

Logaritmische schalen

Waarde $x = O \cdot \left(\frac{B}{O}\right)^a$ Positie $a = \frac{\log\left(\frac{x}{O}\right)}{\log\left(\frac{B}{O}\right)}$ (O, B = **O**nder- en **B**ovengrens interval)

Uitwerkingen examen schakelcursus wiskunde 2010

1 a) $b=\sqrt{a^2+c^2} \rightarrow b=\sqrt{5^2+12^2} = \boxed{13}$

$\tan\alpha = \dfrac{a}{c} \rightarrow \tan\alpha = \dfrac{5}{12} \rightarrow \alpha = \boxed{22{,}620°}$

$\tan\gamma = \dfrac{c}{a} \rightarrow \tan\gamma = \dfrac{12}{5} \rightarrow \gamma = \boxed{67{,}380°}$

b) $A_{totaal} = \tfrac{1}{2}\cdot b\cdot h \rightarrow A_{totaal} = \tfrac{1}{2}\times 12\times 5 = 30\ cm^2$

$A_{ADC} = A_{DBC} = \tfrac{1}{2}\cdot A_{ABC} \rightarrow A_{ADC} = A_{DBC} = \tfrac{1}{2}\times 30 = \boxed{15\ cm^2}$

c) $\tan(\tfrac{1}{2}\gamma) = \dfrac{EB}{a} \rightarrow \tan(\tfrac{1}{2}\times 67{,}380°) = \dfrac{EB}{5} \rightarrow EB = 5\times\tan 33{,}690° = 3{,}3333\ cm$

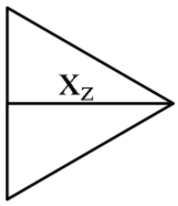
$A_{EBC} = \tfrac{1}{2}\times 3{,}3333\times 5 = \boxed{8{,}3333\ cm^2}$

$A_{AEC} = A_{totaal} - A_{EBC} \rightarrow A_{AEC} = 30 - 8{,}3333 = \boxed{21{,}6667\ cm^2}$

2 a) $A_{zeshoek} = 6\times A_{driehoek} \rightarrow$

$A_{zeshoek} = 6\times\tfrac{1}{2}\times 3^2\times\sin 60° = \boxed{23{,}3727\ cm^2}$

b)



$\sin 60° = \dfrac{x_z}{3} \rightarrow x_z = 3\times\sin 60° = 2{,}5981\ cm \rightarrow$

$X_z = 12 + 2{,}5981 = \boxed{14{,}5981\ cm}$

$Y_z = \boxed{3\ cm}$

c)

	A_n	x_{zn}	y_{zn}
Halve cirkel	56,5487	6	8,5465
Vierkant	72	6	3
Zeshoek	23,3727	14,5981	3
A_{tot}	151,9314		

$A_{tot}\cdot x_z = A_1\cdot x_{z1} + A_2\cdot x_{z2} + A_3\cdot x_{z3} \rightarrow$
$151{,}9314\times x_z = 56{,}5487\times 6 + 72\times 6 + 23{,}3727\times 14{,}5981 \rightarrow x_z = \boxed{7{,}3223\ cm}$

$A_{tot}\cdot y_z = A_1\cdot y_{z1} + A_2\cdot y_{z2} + A_3\cdot y_{z3} \rightarrow$
$151{,}9314\times y_z = 56{,}5487\times 8{,}5465 + 72\times 3 + 23{,}3727\times 3 \rightarrow y_z = \boxed{5{,}0642\ cm}$

3 a) Interval: O = 30 ; B = 800 ; a = 7 ÷ 15 = 0,46667…. →

$$\text{Waarde x} = O \cdot \left(\frac{B}{O}\right)^{a} = 30 \times \left(\frac{800}{30}\right)^{0,46667.....} = \boxed{138,8588}$$

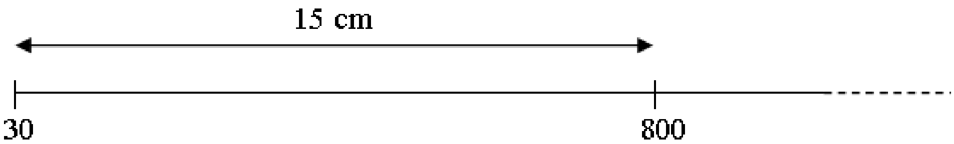
b) Interval: O = 30 ; B = 800 ; x = 80 →

$$\text{Positie a} = \frac{\log\left(\frac{x}{O}\right)}{\log\left(\frac{B}{O}\right)} = \frac{\log\left(\frac{80}{30}\right)}{\log\left(\frac{800}{30}\right)} = 0,2987.... \rightarrow 0,2987.... \times 15\text{ cm} = \boxed{4,4808\text{ cm}}$$

c) Interval: O = 30 ; B = 800 ; x = 1500 →

$$\text{Positie a} = \frac{\log\left(\frac{x}{O}\right)}{\log\left(\frac{B}{O}\right)} = \frac{\log\left(\frac{1500}{30}\right)}{\log\left(\frac{800}{30}\right)} = 1,1915... \rightarrow 1,1915... \times 15\text{ cm} = \boxed{17,8718\text{ cm}}$$

Uitwerking mbv methode uit leerboek:
(zie blz 4 van hoofdstuk 5.5 logaritme)



Hier geldt : (log 800 – log 30) eenheden ⌂ 15 cm
1,42597 eenheden ⌂ 15 cm
1 eenheid ⌂ 10,5192 cm
1 cm ⌂ 0,0950646 eenheid

a) log A – log 30 ⌂ 7 cm
log A – 1,47712 = 7 × 0,0950646
log A – 1,47712 = 0,665452
log A = 2,14257
A = $\boxed{138,8588}$

b) log 80 - log 30 = 0,425969 eenheden
0,425969 eenheden ⌂ 0,425969 × 10,5192 = $\boxed{4,4808\text{ cm}}$

c) log 1500 - log 30 = 1,69897 eenheden
1,69897 eenheden ⌂ 1,69897 × 10,5192 = $\boxed{17,8718\text{ cm}}$

4 a) $Q = A^2 + B \cdot C \rightarrow A^2 + B \cdot C = Q \rightarrow B \cdot C = Q - A^2 \rightarrow \boxed{B = \frac{Q - A^2}{C}}$

b) $R^4 = \frac{0,24 \cdot C}{B} \rightarrow \frac{R^4}{1} = \frac{0,24 \cdot C}{B} \rightarrow 1 \cdot 0,24 \cdot C = B \cdot R^4 \rightarrow \boxed{B = \frac{0,24 \cdot C}{R^4}}$

c) $\left[\begin{array}{l|l} -5p + 2q = -1 & 4 \\ 4p - 3q = -2 & 5 \end{array}\right| \begin{array}{l} -20p + 8q = -4 \\ 20p - 15q = -10 \end{array} \rightarrow -7q = -14 \rightarrow \boxed{q = 2 \rightarrow p = 1}$

5 a) Kegelmantel $r = 5\,\text{cm}$, $h = 20\,\text{cm}$

$A_{\text{mantel}} = \pi \times r \times a \rightarrow A_{\text{mantel}} = \pi \times 5 \times \sqrt{5^2 + 20^2} = \boxed{323{,}8280\ \text{cm}^2}$

b) $A_{\text{halve bol}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \rightarrow A_{\text{halve bol}} = \frac{1}{2} \times 4 \times \pi \times 5^2 = \boxed{157{,}0796\ \text{cm}^2}$

c) $V_{\text{halve bol}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \rightarrow V_{\text{halve bol}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 = \boxed{261{,}7994\ \text{cm}^3}$

d) $V_{\text{kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow V_{\text{kegel}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 20 = 523{,}5988\ \text{cm}^3$

$V_{\text{tol}} = V_{\text{halve bol}} + V_{\text{kegel}} \rightarrow V_{\text{tol}} = 261{,}7994 + 523{,}5988 = \boxed{785{,}3982\ \text{cm}^3}$

6 a) Resultaat is een kegel met hoogte 12 cm en straal 5 cm:

Voor de mantelhoogte a van de kegel geldt: $a = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$A = A_{\text{kegelmantel}} + A_{\text{grondvlak}} \rightarrow A = \pi \cdot r \cdot a + \pi \cdot r^2 \rightarrow$

$A = \pi \times 5 \times 13 + \pi \times 5^2 = \boxed{282{,}7433\ \text{cm}^2}$

b) Resultaat is een kegel met hoogte 5 cm en straal 12 cm:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow V = \frac{1}{3} \times \pi \times 12^2 \times 5 = \boxed{753{,}9822\ \text{cm}^3}$

c) Resultaat is een tol met hoogte h en straal r:

$h = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ (schuine zijde driehoek)

in Δ ABC geldt $a \cdot c = r \cdot c \rightarrow 5 \times 12 = r \times 13 \rightarrow r = 4{,}6154\,\text{cm}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow V = \frac{1}{3} \times \pi \times 4{,}6154^2 \times 13 = \boxed{289{,}9932\ \text{cm}^3}$