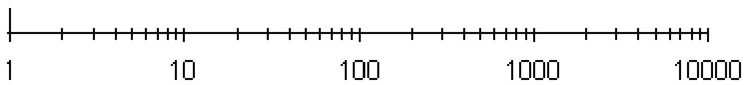
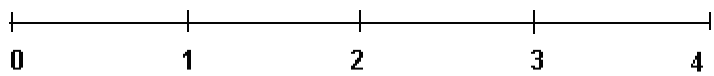
Werken met logaritmische schalen

We gebruiken in **diagrammen** een logaritmische schaal wanneer een grootheid kan variëren van heel klein tot heel groot zoals bij transistorkarakteristieken en frequentiediagrammen.
In de **geluidstechniek** wordt de geluidssterkte uitgedrukt in decibel, een logaritmisch verhoudingsgetal. Dat geldt ook voor de geluidsisolatie van een wand.
In de **audiotechniek** drukken we de versterking van een versterker vaak uit in decibel. Om het volume te regelen gebruiken we logaritmische potentiometers. In de **chemie** geven we de sterkte van een zuur weer door zijn zuurgraad. Deze wordt uitgedrukt in een pH-getal. Zuiver water heeft een pH-waarde van 7. Hoe lager het pH-getal, hoe zuurder de vloeistof. Ook dit pH-getal is een logaritmische waarde.
In de **seismologie** registreren we aardbevingen met een seismograaf. Dit apparaat geeft de uitwijking door een aardbevingsgolf weer in een seismogram. De kracht van een aardbeving wordt uitgedrukt door een getal op de schaal van Richter. Bij deze schaal wordt de logaritme gebruikt van de grootste uitwijking die in het seismogram voorkomt.

Hieronder zien we voorbeelden van een logaritmische schaal en een lineaire schaal:





Het aflezen van logaritmische schalen is niet zo eenvoudig als het aflezen van lineaire.
Als we op een lineaire schaal een punt in het midden van 1 en 2 hebben dan hoort daarbij een waarde van 1,5, namelijk 1 + 2 = 3 en dat gedeeld door 2.
Als we op een lineaire schaal in het midden van 10 en 100 zitten hoort daarbij een waarde van 55, namelijk 10 + 100 = 110 en dat gedeeld door 2.

Als we op een logaritmische schaal een punt in het midden van 10 en 100 hebben dan hoort daarbij een waarde van ongeveer 35 zoals we bij benadering kunnen aflezen.
Willen we deze waarde nauwkeuriger bepalen dan moeten we gebruik maken van formules.
Een formule om van **positie** (het midden) naar **waarde** (ongeveer 35) te gaan luidt als volgt:

$$\boxed{x \cong O \cdot \left(\frac{B}{O}\right)^{a}}$$

In deze formule is O de ondergrens van het interval waarbinnen het punt ligt dus O = 10.
B is de bovengrens van het interval waarbinnen het punt ligt dus B = 100.
a geeft de positie van het punt binnen dit interval dus a = 0.5 (op de helft). Resultaat:

$$x \cong O \cdot \left(\frac{B}{O}\right)^{a} \rightarrow x \cong 10 \times \left(\frac{100}{10}\right)^{0,5} \rightarrow x \cong 31,6$$

Voorbeeld 1.
Op het beginpunt van een logarithmische schaal ligt de waarde 30.
De waarde 800 ligt 15 cm naar rechts.
Welke waarde hoort bij een punt op de schaal dat op 7 cm van het beginpunt ligt?

Oplossing.
Duidelijk is dat O = 30 en B = 800. Het punt ligt op 7 cm van in totaal 15 cm dus a = $^{7}/_{15}$.

$$x \cong O \cdot \left(\tfrac{B}{O}\right)^{a} \rightarrow x \cong 30 \times \left(\tfrac{800}{30}\right)^{\frac{7}{15}} \rightarrow x \cong 138,86$$

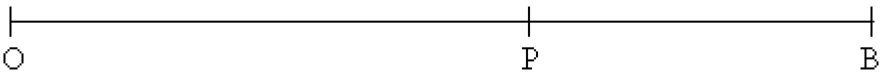
Voorbeeld 2.
Op het beginpunt van een logarithmische schaal ligt de waarde 20.
De waarde 500 ligt 13 cm naar rechts.
Welke waarde hoort bij een punt op de schaal dat op 17 cm van het beginpunt ligt?

Oplossing.
Hier geldt O = 20 en B = 500. Het punt ligt op 17 cm van in totaal 13 cm dus a = $^{17}/_{13}$.

$$x \cong O \cdot \left(\tfrac{B}{O}\right)^{a} \rightarrow x \cong 20 \times \left(\tfrac{500}{20}\right)^{\frac{17}{13}} \rightarrow x \cong 1346,19$$

Merk op dat het punt niet noodzakelijkerwijs binnen een bekend (onder en bovengrens) interval hoeft te liggen als we zijn positie maar kennen.

Voorbeeld 3.
Op een logaritmische schaal OB met ondergrens 40 en bovengrens 250 ligt het punt P.
Welke waarde hoort bij dit punt?



Oplossing.
Om de positie a te bepalen moeten we de afstand OP delen door de afstand OB.
Met een lineaal meten we bijvoorbeeld OP = 9,5 cm en OB = 15,8 cm.
We berekenen a = $^{9,5}/_{15,8}$. Invullen in onze formule levert:

$$x \cong O \cdot \left(\tfrac{B}{O}\right)^{a} \rightarrow x \cong 40 \times \left(\tfrac{250}{40}\right)^{\frac{9,5}{15,8}} \rightarrow x \cong 120,39$$

Het omgekeerde probleem kan ook optreden: we weten de waarde van een punt en moeten de positie berekenen, Daarvoor gebruiken we de volgende formule:

$$\boxed{a \cong \frac{\log\left(\frac{x}{O}\right)}{\log\left(\frac{B}{O}\right)}}$$

Voorbeeld 4.
Op het beginpunt van een logarithmische schaal ligt de waarde 30.
De waarde 800 ligt 15 cm naar rechts.
Op hoeveel cm van het beginpunt ligt een punt met de waarde 80?

Oplossing.
Duidelijk is weer dat O = 30, B = 800 en x = 80. Invullen levert:

$$a \cong \frac{\log\left(\frac{x}{O}\right)}{\log\left(\frac{B}{O}\right)} \rightarrow a \cong \frac{\log\left(\frac{80}{30}\right)}{\log\left(\frac{800}{30}\right)} \rightarrow a \cong 0,29872$$

Het punt ligt dus het 0,29872-ste gedeelte van het interval van 15 cm breed.
Dat betekent op 0,29872 × 15 cm = **4,4808 cm** van het beginpunt.

Voorbeeld 5.
Op het beginpunt van een logarithmische schaal ligt de waarde 30.
De waarde 800 ligt 15 cm naar rechts.
Op hoeveel cm van het beginpunt ligt een punt met de waarde 1500?

Oplossing.
Duidelijk is weer dat O = 30, B = 800 en x = 1500. Invullen levert:

$$a \cong \frac{\log\left(\frac{x}{O}\right)}{\log\left(\frac{B}{O}\right)} \rightarrow a \cong \frac{\log\left(\frac{1500}{30}\right)}{\log\left(\frac{800}{30}\right)} \rightarrow a \cong 1,1914$$

Het punt ligt dus het 1,1914-ste gedeelte van het interval van 15 cm breed.
Dat betekent op 1,1914 × 15 cm = **17,871 cm** van het beginpunt.

Merk op dat ook hier het punt buiten het bekende interval kan liggen.

Voor verdere oefening zie de oude examens van 2006 t/m 2009
Beide formules zijn opgenomen in het formuleblad bij het examen.