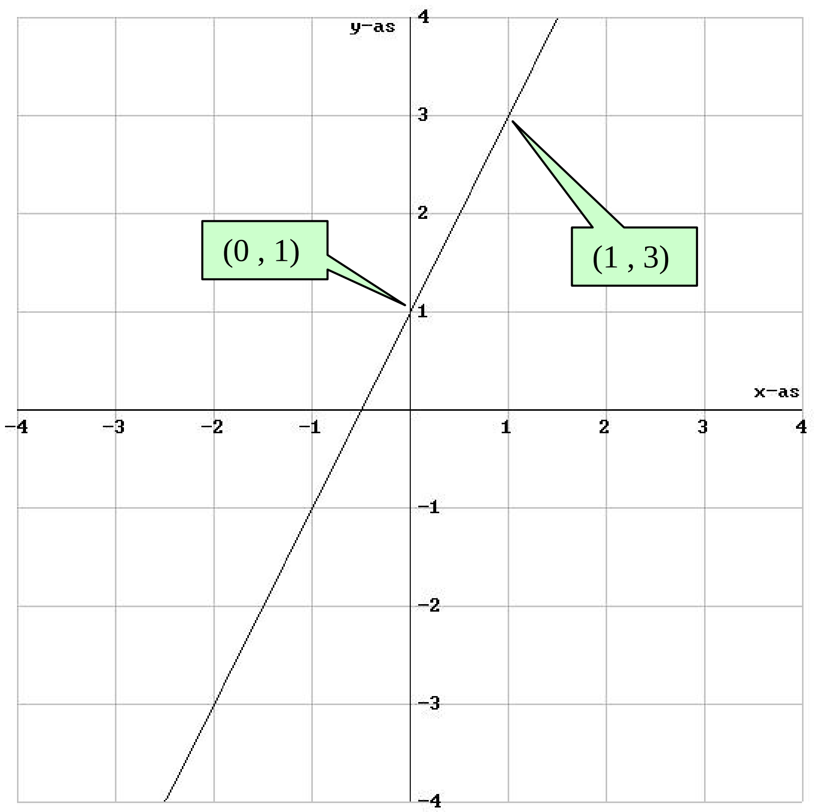
2. Verbanden

Als er tussen twee variabelen x en y een verband bestaat kunnen we dat op meerdere manieren vastleggen: door een vergelijking, door een grafiek of door een tabel.
Stel dat het verband tussen x en y gegeven wordt door de vergelijking $y = 2 \cdot x + 1$.
Bij elke waarde voor x hoort dan een waarde voor y en natuurlijk omgekeerd.
Als $x = 2$ volgt $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.
Omgekeerd als $y = 7$ volgt $7 = 2 \cdot x + 1 \rightarrow 2 \cdot x + 1 = 7 \rightarrow 2 \cdot x = 7 - 1 \rightarrow 2 \cdot x = 6 \rightarrow x = 6/2 = 3$.
Omdat het verband tussen x en y in de vorm $y = a \cdot x + b$ geschreven kan worden spreken we van een *lineair verband*.
Het verband tussen x en y kunnen we ook in grafiekvorm zichtbaar maken.

De grafiek van een lineair verband is altijd een rechte lijn.

Om een grafiek te tekenen hebben we eerst een assenstelsel nodig met een x-as en een y-as:
Omdat we al weten dat de grafiek van $y = 2 \cdot x + 1$ een rechte lijn is kunnen we twee berekende punten in dat assenstelsel tekenen en daar een rechte lijn doorheen trekken.
We nemen voor die twee punten bijvoorbeeld $x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ en
$x = 1 \rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ of anders geschreven de punten (0 , 1) en (1 , 3).
We noemen de waarden van x en y de *coördinaten* van het punt.
We tekenen de twee punten in ons assenstelsel en trekken er een rechte lijn doorheen.
Deze lijn is dan de grafiek van $y = 2 \cdot x + 1$.

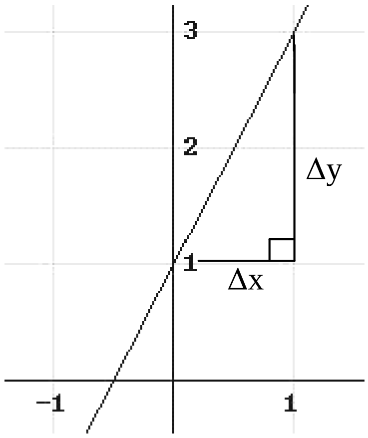


Bovenstaande figuur noemen we een *diagram*. Een diagram bestaat dus uit een assenstelsel en één of meer grafieken.

Bijzondere punten bij een rechte lijn zijn de snijpunten met de assen en de *richtingscoëfficiënt*.
Voor het snijpunt met de x-as stellen we $y = 0 \rightarrow 2 \cdot x + 1 = 0 \rightarrow 2.x = -1 \rightarrow x = -0,5$.
Het snijpunt met de x-as heeft dus de coördinaten (-0,5 , 0)

Voor het snijpunt met de y-as stellen we $x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$
Het snijpunt met de y-as heeft dus de coördinaten (0 , 1)

De richtingscoëfficiënt van de lijn noemen we ook wel de steilheid van de lijn.



In bovenstaand diagram hebben we een rechthoekige driehoek tegen de lijn “geplakt” om de richtingscoëfficiënt te bepalen:
De richtingscoëfficiënt rc berekenen we vervolgens met de formule $rc = \Delta y \div \Delta x$
Uit het diagram lezen we af: $\Delta y = 2$ en $\Delta x = 1$ dus $rc = 2 \div 1 = 2$

Nog even terug naar de vergelijking van de grafiek: $y = 2 \cdot x + 1$.
Het getal bij de x (hier 2) is altijd de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende grafiek.
Het “losse” getal (hier 1) geeft altijd het snijpunt met de y-as aan.

Voorbeeld 1:
We willen de grafiek tekenen van $y = 3 \cdot x - 2$. We weten dat het een rechte lijn is.
Voor het tekenen van een rechte lijn hebben we twee punten van die lijn nodig.
We mogen twee willekeurige waarden voor x nemen en daar de bijbehorende waarde van y mee berekenen. We kiezen natuurlijk twee waarden voor x die makkelijk in te vullen zijn.
Voor $x = 0$ berekenen we $y = 3 \cdot 0 - 2 = -2$ dus het eerste punt is (0 , -2).
Voor $x = 1$ berekenen we $y = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ dus het tweede punt is (1 , 1).
Deze twee punten tekenen we vervolgens in een diagram en trekken er een rechte lijn doorheen. Daarmee hebben we de gevraagde grafiek getekend.

1 Teken in één diagram de grafieken van:
a) $y = 2 \cdot x$ b) $y = 2 \cdot x + 2$ c) $y = 2 \cdot x - 1$
Hoe zie je dat de lijnen dezelfde richtingscoëfficiënt hebben ?

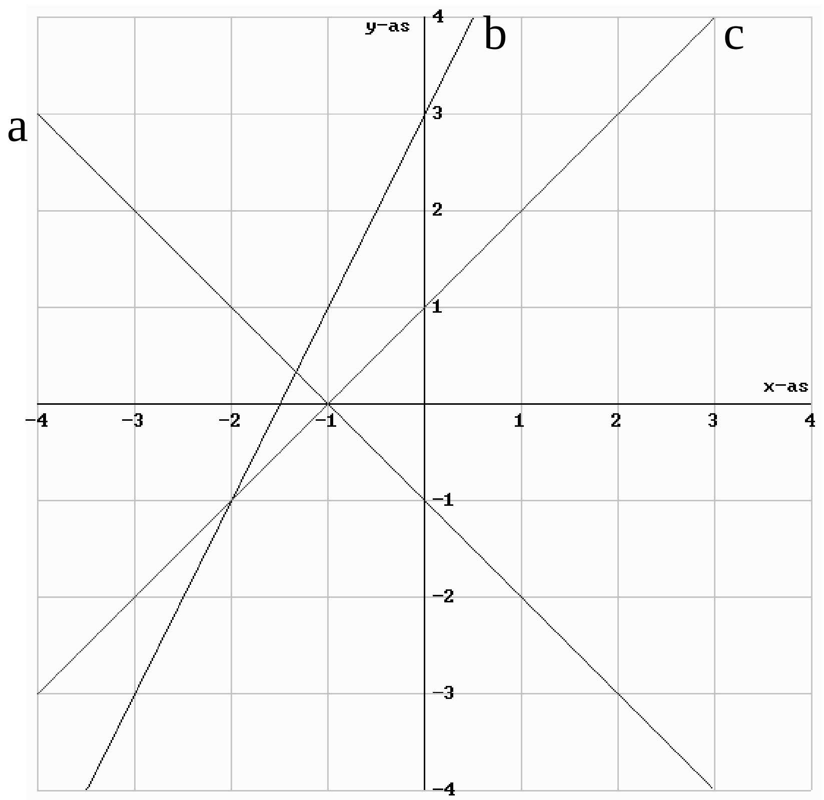
2 Teken in één diagram de grafieken van:
a) $y = 3 \cdot x$ b) $y = 3 \cdot x + 2$ c) $y = 3 \cdot x - 1$
Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van deze drie lijnen ?

3 Teken in één diagram de grafieken van:
a) $y = -x$ b) $y = -x + 2$ c) $y = -x - 1$
Wat zijn de snijpunten met de x-as van deze lijnen ?

4 Teken in één diagram de grafieken van:
a) $y = -2 \cdot x$ b) $y = -2 \cdot x + 2$ c) $y = -2 \cdot x - 1$
Wat zijn de snijpunten met de y-as van deze lijnen ?
Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van deze drie lijnen ?

Omgekeerd kunnen we uit de grafiek van een verband de vergelijking afleiden.
Als de grafiek een rechte lijn is weten we dat de vergelijking de vorm $y = a \cdot x + b$ heeft.
We bepalen de richtingscoëfficiënt waarmee we a weten.
Vervolgens bepalen we de y-coördinaat van het snijpunt met de y-as en dat is b.

5 Bepaal uit het volgende diagram de vergelijkingen van de drie grafieken a, b en c.



Als we de coördinaten van twee punten van een rechte lijn weten kunnen we ook zonder grafiek te tekenen de vergelijking bepalen.

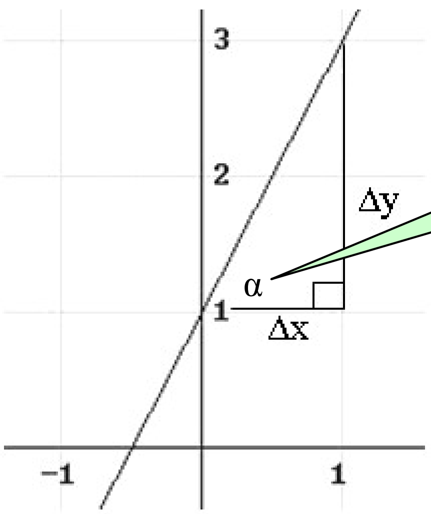
Voorbeeld 2:
Bepaal de vergelijking van de lijn door de punten P (-1 , 6) en Q (3 , 8).
Van P naar Q betekent in de x-richting 4 naar rechts (van -1 naar 3) dus $\Delta x = 4$.
Van P naar Q betekent in de y-richting 2 omhoog (van 6 naar 8) dus $\Delta y = 2$.
Voor de richtingscoëfficiënt berekenen we $rc = \Delta y \div \Delta x = 2 \div 4 = 0{,}5$.

Van de vergelijking $y = a \cdot x + b$ weten we nu $a = 0{,}5$ dus $y = 0{,}5 \cdot x + b$.
Nu moeten we nog b bepalen door bijvoorbeeld de coördinaten van punt P in te vullen:
Door $(-1 , 6) \rightarrow 6 = 0{,}5 \cdot -1 + b \rightarrow b - 0{,}5 = 6 \rightarrow b = 6 + 0{,}5 \rightarrow b = 6{,}5$.
De vergelijking is dus $y = 0{,}5 \cdot x + 6{,}5$.

We hadden om b te bepalen ook de coördinaten van Q kunnen invullen:
Door $(3 , 8) \rightarrow 8 = 0{,}5 \cdot 3 + b \rightarrow b + 1{,}5 = 8 \rightarrow b = 8 - 1{,}5 \rightarrow b = 6{,}5$.

6 Bepaal van de volgende grafieken de bijbehorende vergelijkingen.
De grafieken gaan door de punten:

a) (1 , 4) en (3 , 6)	b) (2 , 5) en (4, 7)
c) (-1 , 4) en (3 , 6)	d) (2 , -5) en (4, -3)
e) (-1 , 2) en (3 , 6)	f) (2 , -3) en (4, -1)



Onder de *hellingshoek* α van een lijn verstaan we de hoek tussen de lijn en de positieve x-as.

De tangens van die hellinghoek berekenen we met
De formule $\tan(\alpha) = \Delta y \div \Delta x$.
Omdat $\Delta y \div \Delta x$ = richtingscoëfficiënt rc geldt ook:

$\tan(\alpha) = rc \rightarrow \alpha = \text{invtan}(rc)$

Voorbeeld 3:
Bereken de hellingshoek van de lijn met vergelijking $y = 2 \cdot x + 1$
Uit de vergelijking volgt $\tan(\alpha) = rc = 2 \rightarrow \alpha = \text{invtan}(2) = 63{,}4349^\circ$.
Op de CASIO fx-82 typen we in: **[shift][tan][2][=]**.
Let erop dat de rekenmachine op graden staat ingesteld!

7 Bepaal van elk van de grafieken a t/m f uit vraagstuk 6 de hellingshoek α.

In de vraagstukken 3 en 4 hebben we gezien dat richtingscoëfficiënten ook negatief kunnen zijn. Die lijnen lopen dan niet naar rechtsboven maar naar rechtsonder.
Bij een negatieve richtingscoëfficiënt hoort een negatieve hellingshoek.

Voorbeeld 4:
Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten P (-1 , 6) en Q (1 , 2).
Van P naar Q betekent dat 2 naar **rechts** (van -1 naar 1) en 4 **omlaag** (van 6 naar 2).
De richtingscoëfficiënt is dus -4 / 2 = -2 met een hellingshoek van -63,43°.

Voorbeeld 5:
Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten P (1 , 2) en Q (-1 , 5).
Van P naar Q betekent dat 2 naar **links** (van 1 naar -1) en 3 omhoog (van 2 naar 5).
De richtingscoëfficiënt is dus 3 / -2 = -1,5 met een hellingshoek van –56,31°.

Dus goed onthouden: een verplaatsing naar rechts of naar boven is positief, een verplaatsing naar links of naar beneden is negatief.

8 Bepaal van de volgende grafieken de bijbehorende vergelijkingen.
De grafieken gaan door de punten:
a) (1 , 4) en (3 , 2)
b) (2 , 5) en (4, 1)
c) (1 , 4) en (-1 , 6)
d) (2 , -5) en (-2, -3)
e) (5 , 2) en (3 , 0)
f) (2 , -3) en (0 , -7)

9 Bepaal van elk van de grafieken a t/m f uit vraagstuk 8 de hellingshoek α.

We hebben nu gezien hoe we een verband tussen twee variabelen door een vergelijking of door een grafiek kunnen vastleggen.
Een verband tussen x en y kunnen we ook in een tabel vastleggen, bijvoorbeeld:

x	y
-4	-5
-1	-3
1	-1
3	1
5	4

tabel 1

Zo’n tabel is bijvoorbeeld het resultaat van een aantal metingen.
In een tabel kunnen we natuurlijk maar een beperkt aantal waarden vastleggen.
Als we bijvoorbeeld de waarde van y willen weten voor x = 3,43 kunnen we dat niet uit de tabel aflezen.
We kunnen hoogstens zeggen dat y tussen 1 en 4 moet liggen en dat is wel erg ruim.
Om een betere benadering voor y te vinden moeten we *interpoleren*.

We tekenen daartoe de volgende deeltabel:

3	1
3,43	y
5	4

We gaan er daarbij van uit dat het verband tussen x en y in het betreffende interval lineair is. Omdat dat in werkelijkheid meestal niet zo is geeft een interpolatie vaak een benadering!!

a	b
c	y
d	e

$$y = b + \frac{c-a}{d-a} \times (e-b)$$

Voor x = 3,43 moeten we de zogenaamde *interpolatieformule* toepassen, zie het kader links.
Vergelijken van onze deeltabel met de benamingen a t/m e levert ons de volgende waarden:
a = 3, b = 1, c = 3,43, d = 5 en e = 4.
Invullen in de interpolatieformule:

$$y = 1 + \frac{(3,43-3)}{(5-3)} \times (4-1) = 1 + \frac{0,43}{2} \times 3 = 1,645$$

Dus als x = 3,43 volgt y = 1,645

10 Bereken uit tabel 1 op bladzijde 5 de bijbehorende y als :
a) x = -3,1 b) x = 0,5 c) x = 2,1 d) x = 4,3
Geef de antwoorden in twee decimalen na de komma.

x hoeft niet binnen de tabel te vallen maar kan er ook buiten staan.
Dat noemen we dan *extrapoleren* in plaats van interpoleren.
We willen bijvoorbeeld de y bepalen voor x = 5,58:

3	1
5	4
5,58	y

a	b
d	e
c	y

We berekenen dan met a = 3, b = 1, c = 5,58, d = 5 en e = 4:

$$y = 1 + \frac{(5,58-3)}{(5-3)} \times (4-1) = 1 + \frac{2,58}{2} \times 3 = 4,87$$

11 Bereken uit tabel 1 op bladzijde 205 de bijbehorende y als :
a) x = -4,5 b) x = -3,3 c) x = 1,35 d) x = 5,87
Geef de antwoorden in twee decimalen na de komma.

b	a
x	c
e	d

$$x = b + \frac{c-a}{d-a} \times (e-b)$$

Als we de x willen bepalen bij een bepaalde y kunnen we dezelfde interpolatie-formule gebruiken waarbij we de plaats van a, b, c, d en e spiegelen zoals in het kader links.

12 Bereken uit tabel 1 op bladzijde 205 de bijbehorende x als :
a) y = -6,5 b) y = -3,36 c) y = 1,28 d) y = 6,87
Geef de antwoorden in twee decimalen na de komma.

Antwoorden verbanden

1 De lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt omdat ze evenwijdig lopen.

2 De richtingscoëfficiënt van de lijnen is 3.

3 a) (0 , 0) b) (2 , 0) c) (-1 , 0)
De richtingscoëfficiënt van de lijnen is -1.

4 a) (0 , 0) b) (0 , 2) c) (0 , -1)
De richtingscoëfficiënt van de lijnen is -2.

5 Grafiek a: $y = -x - 1$
Grafiek b: $y = 2 \cdot x + 3$
Grafiek c: $y = x + 1$

6 a) $y = x + 3$ b) $y = x + 3$ c) $y = 0{,}5 \cdot x + 4{,}5$
d) $y = x - 7$ e) $y = x + 3$ f) $y = x - 5$

7 a) 45,00° b) 45,00° c) 26,57°
d) 45,00° e) 45,00° f) 45,00°

8 a) $y = -x + 5$ b) $y = -2 \cdot x + 9$ c) $y = -x + 5$
d) $y = -0{,}5 \cdot x - 4$ e) $y = x - 3$ f) $y = 2 \cdot x - 7$

9 a) -45,00° b) -63,43° c) -45,00°
d) -26,57° e) 45,00° f) 63,43°

10 a) -4,40 b) -1,50 c) 0,10 d) 2,95

11 a) -5,33 b) -4,53 c) -0,65 d) 5,31

12 a) -6,25 b) -1,54 c) 3,19 d) 6,91