3. Lineaire vergelijkingen

De vergelijking 2x = 3 noemen we een *eerstegraads- of lineaire vergelijking*.
De onbekende x komt er namelijk tot de eerste macht in voor.
Een eerstegraads vergelijking heeft altijd één oplossing.

We lossen x in de vergelijking 2x = 3 op door het getal aan de overkant van het = teken (3) te delen door het getal dat naast de x staat (2).

Als ezelsbruggetje onthouden we: *overbuurman delen door buurman*.

Voorbeeld 1: $2x = 3 \rightarrow x = \dfrac{3 \text{ (overbuurman)}}{2 \text{ (buurman)}} = 1,5$.

Het grote voordeel van vergelijkingen is dat we eenvoudig kunnen controleren of onze oplossing goed is. Als we namelijk de oplossing invullen moet de vergelijking kloppen:

Controle: $2 \times 1,5 = 3$. Klopt!!

Voorbeeld 2: ook de vergelijking 36 = 12f lossen we op door de overkant van het = teken (36) te delen door wat naast de f staat (12) dus $f = 36 \div 12 = 3$.

Controle: $36 = 12 \times 3$. Klopt!!

Los de volgende lineaire vergelijkingen op en geef het antwoord in **vijf decimalen nauwkeurig** (bijvoorbeeld 5,3889 of 0,0034788 of $5,3446 \cdot 10^4$):

1 a) $2y = 6$ b) $6h = 72$ c) $45 = 9k$

d) $34 = 17s$ e) $34g = 89$

2 a) $34t = 23$ b) $34u = 456$ c) $23p = 234,23$ d) $987,543 = 34,9q$

3 a) $234,98h = 234,87$ b) $98=87,234k$ c) $124,98 = 2,3g$ d) $123 = 98,2z$

4 a) $134 \cdot 10^4 = 68 \cdot 1234,98 \cdot x$ b) $5,89 \cdot 10^4 \cdot 5,202 = 34,87 \cdot 45 \cdot 10^3 \cdot p$

5 a) $56,3 \cdot y \cdot 8,604 \cdot 10^4 = 12,3 \cdot 10^5$ b) $69,23 \cdot p \cdot 234,82 \cdot 10^6 = 23,843 \cdot 10^{-5}$

Bij vergelijkingen met breuken gaan we altijd eerst *kruislings vermenigvuldigen*, zoals bij **Voorbeeld 3:**

$$\frac{x}{8{,}7} = \frac{35}{23{,}4}$$

Kruislings vermenigvuldigen levert: x · 23,4 = 8,7 · 35 wat weer een bekende vorm is.
Er volgt nu x = 8,7 · 35 ÷ 23,4 = 13,013.

Controle: 13,013 ÷ 8,7 – 35 ÷ 23,4 = 0,00002063. Klopt!!

Voorbeeld 4:

$$\frac{p}{4{,}5} = 68{,}24 \rightarrow \frac{p}{4{,}5} = \frac{68{,}24}{1} \rightarrow p \cdot 1 = 4{,}5 \cdot 68{,}24 \rightarrow p = 307{,}08$$

Als er slechts aan één kant van het = teken een breuk staat kunnen we ook aan de andere kant een breuk maken door er een één onder te zetten.
Daarna gaan we weer kruislings vermenigvuldigen.

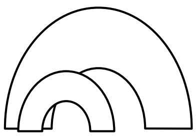
Los de volgende lineaire vergelijkingen op en geef het antwoord in **vijf decimalen nauwkeurig** (bijvoorbeeld 5,3899 , 0,0034788 of $5{,}3446 \cdot 10^4$):

6 $\quad \dfrac{R}{12} = \dfrac{23{,}89}{5{,}6}$

7 $\quad \dfrac{45{,}8}{p} = \dfrac{23{,}8 \cdot 10^3}{236{,}12}$

Voorbeeld 5: we willen de volgende vergelijking oplossen:

$$\frac{56{,}987}{4{,}5} = \frac{2 \cdot p + 3}{24{,}9}$$



Kruislinks vermenigvuldigen levert: 4.5 × (2·p + 3) = 56,987 × 24,9.

Haakjes uitwerken met de *papegaaienbekmethode*:

9·p + 13,5 = 56,987 × 24,9 → 9·p + 13,5 = 1418,9763 →
13,5 naar de rechterkant van het =teken brengen wordt -13,5:
9·p = 1418,9763 – 13,5 → 9·p = 1405,4763 → p = 1405,4763 ÷ 9 = 156,1640.

8 $$\frac{86,987}{4,5} = \frac{24,883}{3 \cdot w + 5}$$

Voorbeeld 6: we willen de volgende vergelijking oplossen:

$\frac{8 \cdot p + 4}{4,5} = \frac{2 \cdot p + 3}{24,9} \rightarrow$ kruislinks vermenigvuldigen: 24.9 × (8·p + 4) = 4,5 × (2·p + 3) →

199,2·p + 99,6 = 9·p +13,5 → 199,2·p – 9·p = 13,5 – 99,6 → 190,2·p = -86,1 → p = -0,4527.

9 $$\frac{3 \cdot q + 4,6}{3,6 \cdot q} = \frac{12,5}{7,4}$$

10 $$\frac{78,3 \cdot U}{4,6 + 23 \cdot U} = 3,12$$

11 $$\frac{6,33 \cdot I + 3,8}{34,78} = \frac{5,89 \cdot I - 6,89}{21,678}$$

12 $$\frac{186,97}{14,5} = \frac{84,883}{3 \cdot M + 5}$$

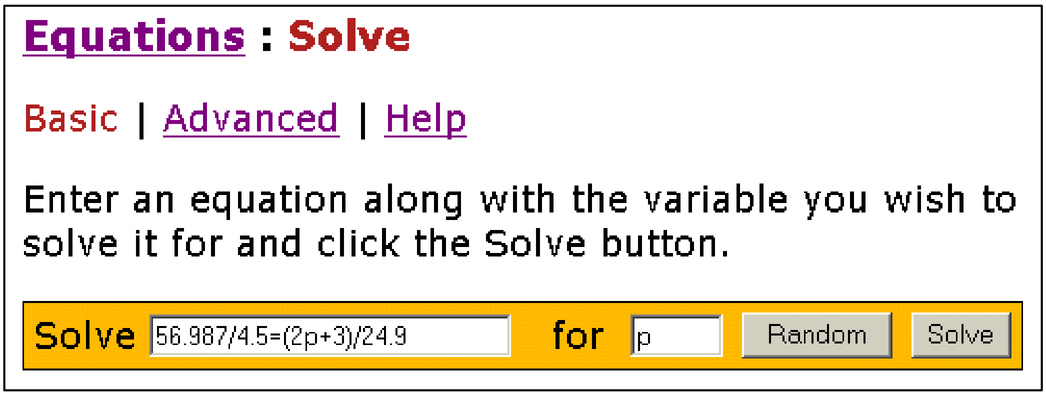
13 $$\frac{2 \cdot q + 5,6}{2,3 \cdot q} = \frac{22,5}{7,4}$$

14 $$\frac{18,3 \cdot X}{3,6 + 53 \cdot X} = 3,12$$

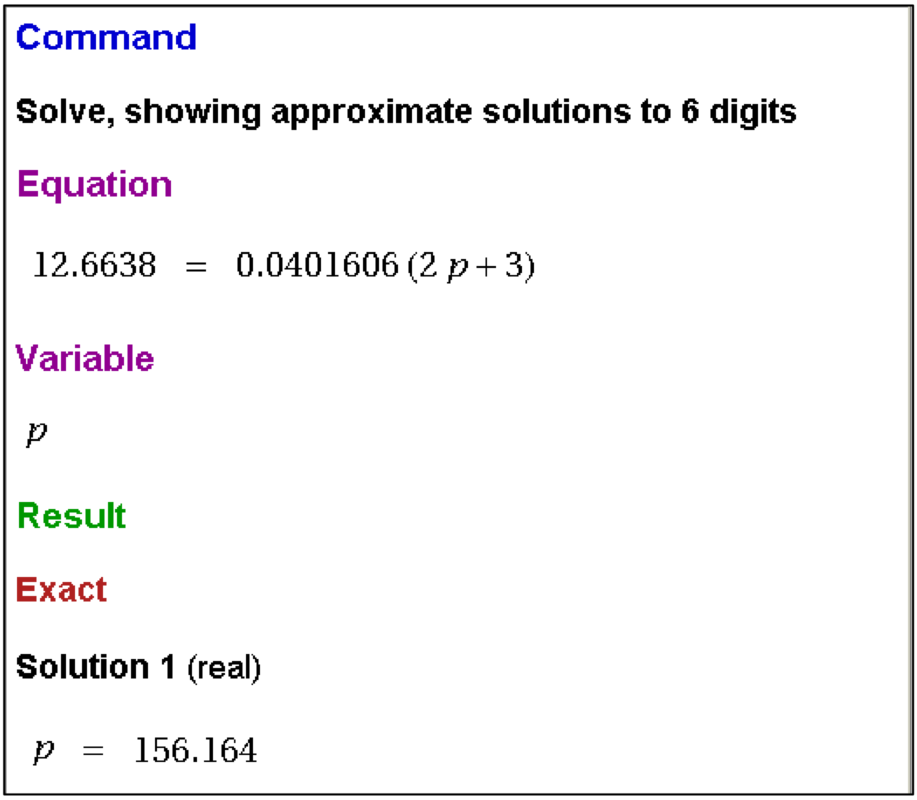
15 $$\frac{7,33 \cdot I - 3,8}{94,78} = \frac{5,82 \cdot I + 6,89}{21,678}$$

Op internet vinden we talrijke *online-calculators* die de voorgaande vergelijkingen voor ons kunnen oplossen. Een van de grootste sites op dit gebied is QuickMath.
Ga maar eens naar http://www.quickmath.com en klik links op het scherm in het vak Equations op Solve. Er verschijnen nu invulvlakken waar we de vergelijking en de naam van de variabele kunnen invoeren.
We gaan nogmaals het vraagstuk uit voorbeeld 5 op bladzijde 302 oplossen:

$$\frac{8 \cdot p + 4}{4,5} = \frac{2 \cdot p + 3}{24,9}$$



Denk bij het invoeren van getallen aan de *decimale punt* in plaats van een *komma* !!
Na klikken op het Solve-ikoon volgt:



We vinden natuurlijk weer dezelfde oplossing.

We hebben tot nu toe telkens één vergelijking met één onbekende opgelost.
Als we te maken hebben met twee onbekenden hebben we twee vergelijkingen nodig.
Omdat die twee vergelijkingen bij elkaar horen spreken we van een *vergelijkingenstelsel*.

$$\begin{cases} -a + b = 6 \\ 3a + b = 8 \end{cases}$$

Dit stelsel is heel eenvoudig op te lossen.
Als we beide vergelijkingen van elkaar aftrekken valt b weg:

$$\begin{cases} -a + b = 6 \\ 3a + b = 8 \end{cases}$$
$$\underline{\qquad\qquad} \; -$$

$$-4a = -2 \;\rightarrow\; a = \frac{-2}{-4} \rightarrow a = 0{,}5.$$

Door vervolgens de gevonden waarde van a in te vullen in bijvoorbeeld de bovenste vergelijking volgt: $-0{,}5 + b = 6 \;\rightarrow\; b = 6 + 0{,}5 \rightarrow b = 6{,}5$

We hadden ook de waarde van a in de tweede vergelijking kunnen invullen:
$3 \times 0{,}5 + b = 8 \;\rightarrow\; 1{,}5 + b = 8 \;\rightarrow\; b = 8 - 1{,}5 \rightarrow b = 6{,}5.$

Meestal kunnen we bij een vergelijkingenstelsel niet direct aftrekken om een onbekende kwijt te raken, zoals bij:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 8 \\ 3a - b = 1 \end{cases}$$

We mogen wel een vergelijking links en rechts met hetzelfde vermenigvuldigen.

We gaan de bovenste vergelijking met 3 en de onderste vergelijking met 2 vermenigvuldigen.
In beide vergelijkingen krijgen we dan de term 6a:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 8 \\ 3a - b = 1 \end{cases} \left|\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} 6a + 9b = 24 \\ 6a - 2b = 2 \end{array}$$

Nu raken we door aftrekking a kwijt en kunnen we b berekenen:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 8 \\ 3a - b = 1 \end{cases} \left|\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} 6a + 9b = 24 \\ 6a - 2b = 2 \end{array}$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; -$$

$11b = 22 \;\rightarrow\; b = 2 \rightarrow\; a = 1$ (hoe komen we daaraan?)

Deze methode staat bekend onder de naam *schoorsteenmethode*.

We kunnen natuurlijk ook proberen om eerst b kwijt te raken:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 8 \\ 3a - b = 1 \end{cases} \left| \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2a + 3b = 8 \\ 9a - 3b = 3 \end{matrix}$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} +$$

$$11a = 11 \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 2$$

Merk op dat we in dit geval moeten *optellen* om b kwijt te raken.
Tip: zet in de schoorsteen altijd positieve getallen om fouten bij het vermenigvuldigen met negatieve getallen te vermijden!

Los de volgende vergelijkingenstelsels op en geef de antwoorden in drijvende komma notatie met vier cijfers achter de komma:

16 a) $\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4s + 3t = -2 \\ 3s - 2t = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2q - 3r = 1 \\ 4q + 6r = 6 \end{cases}$

17 a) $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4s + 3t = -2 \\ 3s - 5t = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2q - 3r = 1 \\ -q + 2r = 6 \end{cases}$

18 a) $\begin{cases} 4x - 3y = 3 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4v + 3w = -5 \\ 3v - 2w = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2q - 3r = 7 \\ 4q + 6r = 6 \end{cases}$

We weten nu hoe we twee vergelijkingen met twee onbekenden kunnen oplossen.
Drie vergelijkingen met drie onbekenden kunnen we herleiden tot twee vergelijkingen met twee onbekenden. Daartoe isoleren we een willekeurige onbekende uit een van de vergelijkingen en vullen hem in de overige twee vergelijkingen in:

$$\begin{cases} 4a + 2b - c = 4 \rightarrow \quad c = \underline{\mathbf{4a + 2b - 4}} \rightarrow \text{ invullen in de overige twee vergelijkingen:} \\ -a + 3b - 2c = -2 \\ 2a - b + 3c = 7 \end{cases}$$

$-a + 3b - 2(\underline{\mathbf{4a + 2b - 4}}) = -2 \rightarrow -a + 3b \underline{\mathbf{- 8a - 4b + 8}} = -2 \rightarrow -9a - b = -10$

$2a - b + 3(\underline{\mathbf{4a + 2b - 4}}) = 7 \rightarrow 2a - b \underline{\mathbf{+ 12a + 6b - 12}} = 7 \rightarrow 14a + 5b = 19$

We hebben nu drie vergelijkingen met drie onbekenden herleid tot twee vergelijkingen met twee onbekenden. Hierna volgt weer met de schoorsteenmethode $a = 1$ en $b = 1$.
Tenslotte berekenen we $\mathbf{c = 4a + 2b - 4} = 4\times1 + 2\times1 - 4 = 2$

Opmerking 1: we hadden natuurlijk ook uit de onderste vergelijking de onbekende b kunnen isoleren en in de bovenste twee vergelijkingen kunnen invullen.

Opmerking 2: bij bijvoorbeeld tien vergelijkingen met tien onbekenden kunnen we een willekeurige onbekende uit een van de vergelijkingen isoleren en in de overige vergelijkingen invullen. Daardoor krijgen we negen vergelijkingen met negen onbekenden, enzovoort.

Antwoorden lineaire vergelijkingen

1	a) y = 3,0000	b) h = 12,000	c) k = 5,0000	
	d) s = 2,0000	e) g = 2.6176		
2	a) t = 0,67647	b) u = 13,412	c) p = 10,184	d) q = 28,296
3	a) h = 0,99953	b) k = 1,1234	c) g = 54,339	d) z = 1,2525
4	a) x = 15,956	b) p = 0,19526		
5	a) y = 0,25392	b) p = 0,014667		
6	R = 51,193			
7	p = 0,45438			
8	w = - 1,2376			
9	q = 1,4930			
10	u = 2,1945			
11	I = 4,7612			
12	M = 0,52763			
13	q = 1,1215			
14	x = -0,076377			
15	I = -1,8726			
16	a) x = 2,0000 ; y = 0,5000	b) s = 1,0000 ; t = -2,0000		
	c) q = 1,0000 ; r = 0,3333			
17	a) x =25,0000 ; y = 16,0000	b) s = 0,3793 ; t = -1,1724		
	c) q = 20,0000 ; r = 13,0000			
18	a) x = 1,5882 ; y = 1,1176	b) v = 0,6471 ; w = -2,5294		
	c) q = 2,5000 ; r = -0,6667			