4. Exponentiële vergelijkingen

De gelijkheid $10^3 = 1000$ bevat drie getallen: 10, 3 en 1000.
Als we van die drie getallen er één niet weten moeten we hem kunnen berekenen.
We kunnen dus drie gevallen onderscheiden:

1) We weten de 1000 niet, als we op die plaats een x zetten volgt:
$10^3 = x \rightarrow$ de uitkomst $x = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ heet de *derde macht* van 10.

2) We weten de 10 niet, als we op die plaats een x zetten volgt:
$x^3 = 1000 \rightarrow$ de uitkomst $x = \sqrt[3]{1000}$ heet de *derdemachtswortel* van 1000.

3) We weten de 3 niet, als we op die plaats een x zetten volgt:
$10^X = 1000 \rightarrow$ de uitkomst x = 3 noemen we de *10-logaritme van 1000*.
We schrijven dat als $x = {}^{10}\log 1000$ waarbij 10 hier het *grondtal* van de logaritme is.

Als we bijvoorbeeld de vergelijking $10^X = 23$ willen oplossen weten we dat $x = {}^{10}\log 23$.
Met de **log-toets** op onze rekenmachine kunnen we de 10-logaritme van een getal berekenen.

Op de CASIO fx-82 typen we **[log][23][=]**. Het resultaat is 1,3617.
Ter controle berekenen we $10^{1,3617} = 22,9985$. (waarom niet exact 23?)

Voorbeeld 1: $10^{3 \cdot X} = 350 \rightarrow 3 \cdot x = {}^{10}\log 350 \rightarrow 3 \cdot x = 2,5441 \rightarrow x = 2,5441 \div 3 = 0,8480$.
We typen in: **[log][350][=][÷][3][=]**

1 Los de volgende vergelijkingen op en geef de antwoorden in drijvende komma notatie met vier cijfers achter de komma:

a) $10^X = 35$ b) $10^X = 200$ c) $10^X = 3000$

d) $10^{3 \cdot X} = 550$ e) $10^{5 \cdot X} = 1200$ f) $10^{2 \cdot X} = 4500$

Voorbeeld 2: $5 \cdot 10^{4 \cdot X} = 100 \rightarrow 10^{4 \cdot X} = 100 \div 5 \rightarrow 10^{4 \cdot X} = 20 \rightarrow 4 \cdot x = {}^{10}\log 20 \rightarrow$
$4 \cdot x = 1,3010 \rightarrow x = 1,3010 \div 4 \rightarrow x = 0,3253$
We typen: **[100][÷][5][=][log][ANS][=][÷][4][=]**

2 Los de volgende vergelijkingen op en geef de antwoorden in drijvende komma notatie met vier cijfers achter de komma:

a) $5 \cdot 10^X = 35$ b) $4 \cdot 10^X = 200$ c) $30 \cdot 10^X = 3000$

d) $11 \cdot 10^{3 \cdot X} = 55$ e) $6 \cdot 10^{5 \cdot X} = 120$ f) $9 \cdot 10^{2 \cdot X} = 450$

Logaritmen met grondtal 10 gebruiken we het meest. Daarom vermelden we bij logaritmen met grondtal 10 meestal niet meer het grondtal, dus log 5 betekent ${}^{10}\log 5$.

Met de $\boxed{\text{ln}}$-toets op de rekenmachine kunnen we logaritmen uitrekenen met grondtal **e**.
Het getal **e** is net zoals π een natuurkonstante. (**e** ≈ 2,71828)

Een logaritme met grondtal **e** noemen we een *natuurlijke logaritme* en duiden we aan met ln.
ln x is dus eigenlijk een andere schrijfwijze voor ${}^{e}\log x$.

Als we de vergelijking $\mathbf{e}^{X} = 23$ willen oplossen weten we dat $x = {}^{e}\log 23 = \ln 23$.
Op de CASIO fx-82 typen we **[ln][23][=].**
Het resultaat is 3,1355. Ter controle berekenen we $\mathbf{e}^{3,1355} = 23,0001$.

Voorbeeld 3: $\mathbf{e}^{3\cdot R} = 24 \rightarrow 3\cdot R = \ln 24 \rightarrow 3\cdot R = 3,1781 \rightarrow R = 3,1781 \div 3 \rightarrow R = 1,0594$.
We typen: **[ln][24][=][÷][3][=]**

3 Los de volgende vergelijkingen op en geef de antwoorden in drijvende komma notatie met vier cijfers achter de komma:

a) $\mathbf{e}^{X} = 35$ b) $\mathbf{e}^{X} = 200$ c) $\mathbf{e}^{X} = 3000$

d) $\mathbf{e}^{3\cdot X} = 550$ e) $\mathbf{e}^{5\cdot X} = 1200$ f) $\mathbf{e}^{2\cdot X} = 4500$

Een macht met grondtal e zoals $\mathbf{e}^{5\cdot X}$ noemen we een e-macht.

Voorbeeld 4: $3\cdot\mathbf{e}^{2\cdot X} = 12 \rightarrow \mathbf{e}^{2\cdot X} = 12 \div 3 \rightarrow \mathbf{e}^{2\cdot X} = 4 \rightarrow 2\cdot x = \ln 4 \rightarrow 2\cdot x = 1,3863 \rightarrow$
$x = 1,3863 \div 2 \rightarrow x = 0,6931$.
We typen: **[12][÷][3][=][ln][ANS][=][÷][2][=]**

Voorbeeld 5: $6 - 3\cdot\mathbf{e}^{2\cdot X} = 4 \rightarrow -3\cdot\mathbf{e}^{2\cdot X} = 4 - 6 \rightarrow -3\cdot\mathbf{e}^{2\cdot X} = 4 - 6 \rightarrow -3\cdot\mathbf{e}^{2\cdot X} = -2 \rightarrow$
$\mathbf{e}^{2\cdot X} = -2 \div -3 \rightarrow \mathbf{e}^{2\cdot X} = 0,6667 \rightarrow 2\cdot x = \ln 0,6667 \rightarrow 2\cdot x = -0,4055 \rightarrow$
$x = -0,4055 \div 2 \rightarrow x = -0,2027$.

4 Los de volgende vergelijkingen op en geef de antwoorden in drijvende komma notatie met vier cijfers achter de komma:

a) $5\cdot\mathbf{e}^{-3\cdot T} = 4$ b) $3\cdot\mathbf{e}^{-4\cdot T} = 5$ c) $6 - 6\cdot\mathbf{e}^{-3\cdot T} = 2$

d) $4 - 5\cdot\mathbf{e}^{-3\cdot T} = 2$ e) $8 - 5\cdot\mathbf{e}^{3\cdot T} = 4$ f) $7 - 2\cdot\mathbf{e}^{4\cdot T} = 3$

Als we de vergelijking $5^X = 30$ willen oplossen weten we al dat $x = {}^5\log 30$.
Het probleem is natuurlijk dat de logaritme met grondtal 5 niet op onze rekenmachine zit.
We hebben wat meer kennis nodig over de eigenschappen van logaritmen.
We gaan gebruik maken van de volgende formule:

$${}^a\log b = \frac{{}^C\log b}{{}^C\log a}$$

c mag een willekeurig getal zijn, we kiezen natuurlijk een grondtal dat op onze rekenmachine zit dus met c = 10 wordt onze formule:

$${}^a\log b = \frac{{}^{10}\log b}{{}^{10}\log a}$$

Dat betekent dat we ${}^5\log 30$ uit kunnen rekenen met $\log 30 \div \log 5 = 2{,}1133$.
We controleren weer $5^{2,1133} = 30{,}0008$. (weten we nog hoe we machten intypen?)

$10^X = 35 \rightarrow x = \log 35 \rightarrow x = 1{,}5441$

$\mathbf{e}^X = 45 \rightarrow x = \ln 45 \rightarrow x = 3{,}8067$

$8^X = 60 \rightarrow x = \log 60 \div \log 8 \rightarrow x = 1{,}9690$

◄ Overzicht

5 Los de volgende vergelijkingen op en geef de antwoorden in drijvende komma notatie met vier cijfers achter de komma:

a) $3^X = 35$ b) $4^X = 200$ c) $5^X = 3000$

d) $8^{3\cdot X} = 550$ e) $12^{5\cdot X} = 1200$ f) $34^{2\cdot X} = 4500$

Voorbeeld 6: we willen de vergelijking $6^{3\cdot Y - 4} = 45$ oplossen.

Er volgt met de definitie van logaritme: $3\cdot Y - 4 = {}^6\log 45 \rightarrow$

$3\cdot Y - 4 = \log 45 \div \log 6 \rightarrow 3\cdot Y - 4 = 2{,}1245 \rightarrow 3\cdot Y = 2{,}1245 + 4 \rightarrow$

$3\cdot Y = 6{,}1245 \rightarrow Y = 6{,}1245 \div 3 \rightarrow Y = 2{,}0415$.

Controle: $6^{3 \cdot 2,0415 - 4} = 6^{2,1245} = 44{,}9969$.

6 Los de volgende vergelijkingen op en geef de antwoorden in drijvende komma notatie met vier cijfers achter de komma:

a) $5^{2\cdot W + 4} = 63$ b) $6^{-2\cdot X - 3} = 52$ c) $14^{3\cdot Z + 4} = 148$
d) $7^{2\cdot W + 4} = 155$ e) $16^{-2\cdot X - 3} = 466$ f) $214^{3\cdot Z + 5} = 96$

We hebben nu gezien dat we logaritmen nodig hebben voor het oplossen van vergelijkingen waar de onbekende in de exponent staat.
We noemen dergelijke vergelijkingen daarom *exponentiële vergelijkingen*

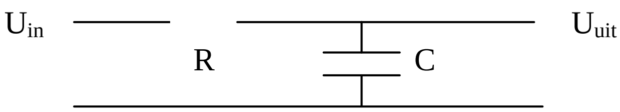
7 Los de volgende exponentiële vergelijkingen op en geef de antwoorden in wetenschappelijke notatie met vier cijfers achter de komma:

a) $4 - 7 \cdot \mathbf{e}^{-3 \cdot T} = 2$ b) $8 - 5 \cdot \mathbf{e}^{3 \cdot T} = 7$ c) $9 - 2 \cdot \mathbf{e}^{4 \cdot T} = 3$

d) $8^{3 \cdot X} = 660$ e) $12^{5 \cdot X} = 930$ f) $48^{2 \cdot X} = 4500$

g) $5^{2 \cdot W + 8} = 155$ h) $26^{-2 \cdot X - 5} = 430$ i) $554^{4 \cdot Z + 5} = 96$

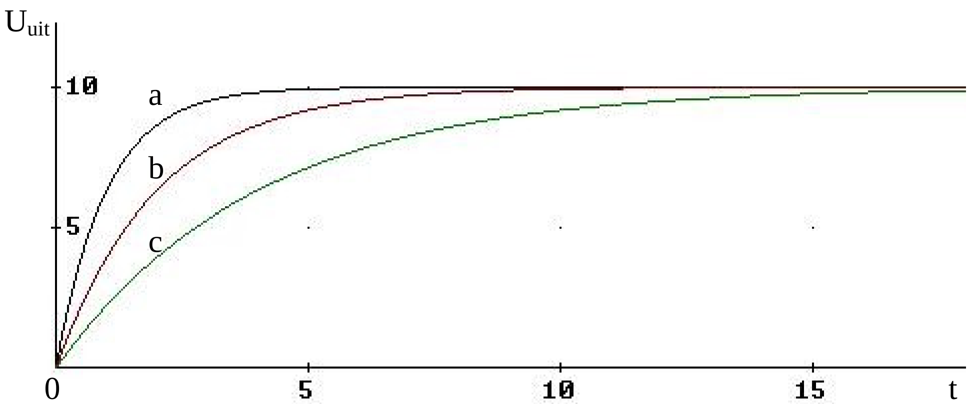
Voorgaande e-machten spelen een grote rol in formules voor het laden en ontladen van condensatoren via weerstanden.
We bekijken het volgende voorbeeld waarbij we exponentiële vergelijkingen moeten oplossen. We laden een condensator C via een weerstand R:



Voor de uitgangsspanning U_{uit} geldt de formule $U_{uit} = U_{in} \cdot (1 - \mathbf{e}^{-t/\tau})$.
t is daarbij de tijd in sekonden en τ de *tijdconstante* van de schakeling in sekonden.

De tijdconstante τ (Griekse t, spreek uit als 'touw') berekenen we door de waarden van de weerstand en de condensator met elkaar te vermenigvuldigen dus $\tau = R \cdot C$.
Voorbeeld: als R = 100 kΩ en C = 33 μF geldt $\tau = 100 \cdot 10^3 \cdot 33 \cdot 10^{-6} = 3{,}3$ s.

De grafiek van U_{uit} ziet er voor bijvoorbeeld $U_{in} = 10$ V als volgt uit:



Voor grafiek a geldt $\tau = 1$ s, voor grafiek b geldt $\tau = 2$ s en voor grafiek c geldt $\tau = 4$ s.
We zien dus dat hoe groter de tijdconstante τ is, hoe langzamer de spanning over de condensator oploopt.

We gaan berekenen wanneer de uitgangsspanning 5 V is bij een tijdconstante τ van 1 s:
Voor de uitgangsspanning geldt $U_{uit} = 10 - 10 \cdot \mathbf{e}^{-t}$.
Als $U_{uit} = 5$ V moeten we de exponentiële vergelijking $10 - 10 \cdot \mathbf{e}^{-t} = 5$ oplossen.
Er volgt: $-10 \cdot \mathbf{e}^{-t} = 5 - 10 \rightarrow -10 \cdot \mathbf{e}^{-t} = -5 \rightarrow \mathbf{e}^{-t} = -5 / -10 \rightarrow \mathbf{e}^{-t} = 0{,}5 \rightarrow -t = \ln 0{,}5 \rightarrow$
$-t = -0{,}6931 \rightarrow t = 0{,}6931$ s.

Vervolgens gaan we berekenen wanneer de uitgangsspanning 5 V is bij een tijdconstante τ van 4 s:
Voor de uitgangsspanning geldt $U_{uit} = 10 - 10 \cdot \mathbf{e}^{-t/4}$.
Als $U_{uit} = 5$ V moeten we de exponentiële vergelijking $10 - 10 \cdot \mathbf{e}^{-t/4} = 5$ oplossen.
Er volgt: $-10 \cdot \mathbf{e}^{-t/4} = 5 - 10 \rightarrow -10 \cdot \mathbf{e}^{-t/4} = -5 \rightarrow \mathbf{e}^{-t/4} = -5 / -10 \rightarrow \mathbf{e}^{-t/4} = 0{,}5 \rightarrow -t/4 = \ln 0{,}5 \rightarrow$
$-t/4 = -0{,}6931 \rightarrow t = 4 \cdot 0{,}6931 \rightarrow t = 2{,}7724$ s.

We zien duidelijk dat het bij een grotere tijdconstante langer duurt voordat de uitgangsspanning een bepaalde waarde bereikt.
We krijgen een grotere tijdconstante door de R of de C een grotere waarde te geven.

Behalve bij exponentiële vergelijkingen komen we logaritmen veelvuldig tegen in de techniek.
We gebruiken in **diagrammen** een logaritmische schaal wanneer een grootheid kan variëren van heel klein tot heel groot zoals bij transistorkarakteristieken en frequentiediagrammen.
In de **geluidstechniek** wordt de geluidsintensiteit uitgedrukt in decibel, een logaritmisch verhoudingsgetal. Dat geldt ook voor de geluidsisolatie van een wand.
In de **audiotechniek** drukken we de versterking van een versterker vaak uit in decibel. Om het volume te regelen gebruiken we logaritmische potentiometers. In de **chemie** geven we de sterkte van een zuur weer door zijn zuurgraad. Deze wordt uitgedrukt in een pH-getal. Zuiver water heeft een pH-waarde van 7. Hoe lager het pH-getal, hoe zuurder de vloeistof. Ook dit pH-getal is een logaritmische waarde.
In de **seismologie** registreren we aardbevingen met een seismograaf. Dit apparaat geeft de uitwijking door een aardbevingsgolf weer in een seismogram. De kracht van een aardbeving wordt uitgedrukt door een getal op de schaal van Richter. Bij deze schaal wordt de logaritme gebruikt van de grootste uitwijking die in het seismogram voorkomt. Om aardbevingen met elkaar te kunnen vergelijken gebruiken we seismogrammen die op een afstand van 100 km van het epicentrum zijn gemaakt. Het epicentrum is de plaats aan het oppervlak van de aarde waar de beving het eerste optreedt.

Antwoorden exponentiële vergelijkingen

1	a) 1,5441	b) 2,3010	c) 3,4771
	d) 0,9135	e) 0,6158	f) 1,8266
2	a) 0,8451	b) 1,6990	c) 2,0000
	d) 0,2330	e) 0,2602	f) 0,8495
3	a) 3,5553	b) 5,2983	c) 8,0064
	d) 2,1033	e) 1,4180	f) 4,2059
4	a) 0,0744	b) -0,1277	c) 0,1352
	d) 0,3054	e) –0,0744	f) 0,1733
5	a) 3,2362	b) 3,8219	c) 4,9746
	d) 1,0115	e) 0,5707	f) 1,1927
6	a) –0,7129	b) –2,6026	c) –0,7021
	d) –0,7041	e) –2,6080	f) –1,3831
7	a) $4{,}1759 \cdot 10^{-1}$	b) $-5{,}3648 \cdot 10^{-1}$	c) $2{,}7465 \cdot 10^{-1}$
	d) 1,0407	e) $5{,}5014 \cdot 10^{-1}$	f) 1,0865
	g) –2,4332	h) –3,4306	i) –1,0694