

5. Stromingsleer

De belangrijkste vergelijking in de stromingsleer is de continuïteitsvergelijking.

Deze is de vertaling van de wet van behoud van massa: wat er aan massa een leiding instroomt moet er ook weer uitstromen.

Bij gelijke temperatuur houdt dat tevens in dat het vloeistofvolume wat per seconde de buis instroomt gelijk is aan het volume dat er per seconde weer uitstroomt.

Stel dat vloeistof met een snelheid van v_1 m/s een buis met een **doorsnede** van A_1 m² instroomt. Dat betekent een volume-instroom per seconde van $A_1 \cdot v_1$ m³.

Als dezelfde vloeistof met een snelheid van v_2 m/s de buis met een andere doorsnede van A_2 m² verlaat betekent dat een volume-uitstroom per seconde van $A_2 \cdot v_2$ m³.

Gelijkstellen van in- en uitstroomvolume leidt tot de volgende vergelijking:

Continuïteitsvergelijking: $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$

Opgave 1 We transporteren olie door een transportbuis met een diameter van 30 cm. De snelheid van de olie is 2 m/s. De opening aan het uiteinde van de buis heeft een diameter van 10 cm. Met welke snelheid verlaat de olie de buis?

Opgave 2 De olie uit opgave 1 komt terecht in een tank met een inhoud van 10 000 liter. Hoe lang duurt het voordat de tank volledig met olie is gevuld?

De hoeveelheid vloeistof die per tijdseenheid door een leiding stroomt noemen we het **debiet**. Als we de hoeveelheid uitdrukken in m³ spreken we van het **volumedebiet** q_V . Als we de hoeveelheid uitdrukken in kg spreken we van het **massadebiet** q_M .

Opgave 3 Een pomp pompt 60 liter water per minuut uit een sloot via een slang met een inwendige diameter van 3 cm. Aan het einde van de slang is een kraan bevestigd met een inwendige diameter van 1 cm.

- Bereken het volumedebiet q_V in m³/s
- Met welke snelheid verlaat het water de kraan?
- Wat is het massadebiet q_M in kg/s? (bedenk dat $\rho_{\text{water}} = 1000$ kg/m³)

Viscositeit is de 'stropigheid' van een vloeistof of van een gas. Zo is water een voorbeeld van een vloeistof met een lage viscositeit, honing een voorbeeld van een vloeistof met een hoge viscositeit. De viscositeit van een vloeistof is sterk afhankelijk van de temperatuur. We onderscheiden de **kinematische viscositeit** ν , uitgedrukt in m²/s en de **dynamische viscositeit** η , uitgedrukt in Pa·s.

Het verband tussen die twee grootheden luidt: $\nu = \frac{\eta}{\rho}$

De **Poiseuille** (Pl) is een oude eenheid van dynamische viscositeit, $1 \text{ Pl} = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$
 Een oude cgs-eenheid (centimeter-gram-seconde) voor dynamische viscositeit is de **Poise** (P),
 $1 \text{ P} = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Meer gebruikelijk is de centiPoise ($1 \text{ cP} = 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$). Een oude eenheid voor
 kinematische viscositeit is de **Stokes** ($1 \text{ St} = 1 \text{ cm}^2/\text{s}$) of de centiStokes ($1 \text{ cSt} = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$)

Opgave 4 Een bepaalde oliesoort heeft een dynamische viscositeit van $10 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ bij 20°C
 Hoe groot is de kinematische viscositeit bij deze temperatuur als de dichtheid
 van de olie $850 \text{ kg}/\text{m}^3$ bedraagt?

Het **Getal van Reynolds Re** is een dimensieloos getal uit de stromingsleer.
 De grootte bepaalt of een stroming **laminair** is of **turbulent**.

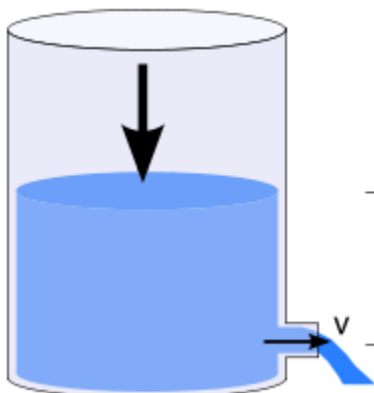
$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta} \quad \text{of} \quad \text{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu}$$

Stroming in buizen is bijvoorbeeld laminair als $\text{Re} < 2300$ en turbulent wanneer $\text{Re} > 3500$.
 Tussen deze grenzen hangt het van verschillende factoren af, zoals bijvoorbeeld de
 wandruwheid, of de stroming laminair of turbulent is,.

Opgave 5 Door een buis met een inwendige diameter van 48 mm stroomt glycerine met
 een snelheid van $2 \text{ m}/\text{s}$. De kinematische viscositeit bedraagt $848 \text{ mm}^2/\text{s}$.
 a) Bereken het getal van Reynolds
 b) Is deze stroming laminair of turbulent?

Opgave 6 Door een buis stroomt benzeen met een snelheid van $20 \text{ cm}/\text{s}$. De kinematische
 viscositeit bedraagt $0,0073 \text{ cm}^2/\text{s}$. Bereken de inwendige diameter van de
 buis als de stroming nog juist laminair is.

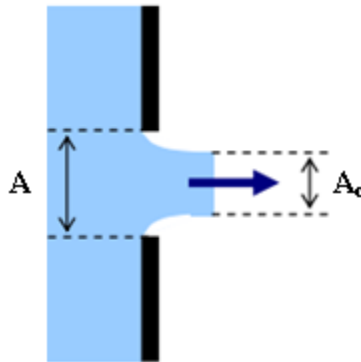
Opgave 7 Uit een volledig opengedraaide kraan stroomt 5 liter water per minuut.
 De diameter van de opening bedraagt 10 mm . De diameter van de
 hoofdleiding is 30 mm . Bereken de stroomsnelheid van het water
 in de hoofdleiding.



Wanneer in een reservoir onder invloed van de
 zwaartekracht vloeistof uit een lager gelegen opening
 stroomt, dan is volgens de wet van Torricelli de
 uitstroomsnelheid waarmee de vloeistof uit die opening
 stroomt, evenredig met de wortel uit de vloeistofhoogte.

Wet van Torricelli: $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \approx \sqrt{20 \cdot h}$

Merk op dat deze snelheid niet afhankelijk is van de
 grootte van de opening!



Wat wel afhankelijk is van de grootte en vorm van de uitstroomopening is het debiet .
Voor het volumedebiet q_v geldt:

$$q_v = A_c \cdot v \Rightarrow q_v = A \cdot C \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

C is daarbij de contractiecoëfficiënt. Deze heeft een waarde tussen 0,5 en 1 en is afhankelijk van de vorm van de opening en de dikte van de wand.

- Opgave 8 Een cilindervormig waterreservoir met een inhoud van 5000 liter heeft een diameter van 2,5 m en is volledig gevuld met water.
In de bodem ontstaat een gat met een oppervlakte van 4 cm^2 .
a) Bereken de uitstroomsnelheid.
b) Bereken het volumedebiet in m^3/s als $C = 0,6$

- Opgave 9 In een olievat ontstaat een lek in de bodem. Daaruit stroomt olie met een snelheid van 5 m/s. Hoe hoog staat op dat moment de olie in dit vat?

De **Wet van Bernoulli** beschrijft het stromingsgedrag van vloeistoffen en gassen, en verbindt de drukveranderingen aan hoogte- en snelheidsveranderingen.

Wet van Bernoulli: $p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$

- Opgave 10 In een flat voeren we met een pomp water op tot een hoogte van 40 m. De diameter van de aanvoerbuis bedraagt 2 cm en van de uitstroomopening van de kraan 0,8 cm. De barometerstand bedraagt 1 bar. Als we de kraan volledig openen stroomt het water er met een snelheid van 2 m/s uit. Met welke druk voert de pomp het water op?

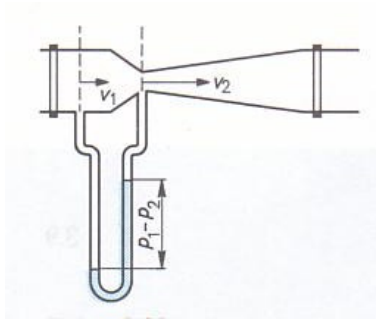
- Opgave 11 Een groot vat is gevuld met wijn. De dichtheid van de wijn is 900 kg/m^3 . In de bodem bevindt zich een rond gat met een doorsnede van 2 cm^2 dat afgesloten is met een houten prop.
Als we deze prop weghalen stroomt de wijn weg met een snelheid van 4 m/s.
a) Bereken de hoogte van de wijn in het vat op dat moment.
b) Bereken het volumedebiet op dat moment als $C = 0,8$

Een methode om een debiet te bepalen is de verschildruk flowmeting (dP-meting).

In een leiding wordt dan een vernauwing geplaatst.

Het gemeten drukverschil over deze vernauwing is evenredig met het debiet.

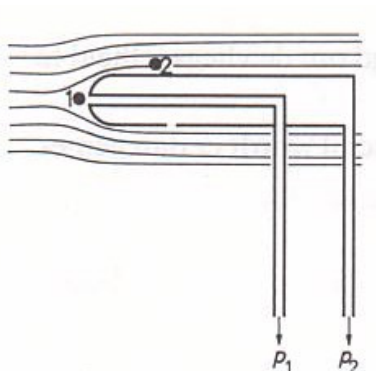
Er zijn verschillende flowelementen. Het meest bekend is de meetplaat. Deze bestaat uit een vlakke metalen plaat met een rond gat in het midden, die doorgaans tussen twee flenzen geklemd wordt. Er worden twee druknamepunten geplaatst vóór en achter de meetplaat. Het gemeten drukverschil is kwadratisch met de flow. Zie ook <http://www.flowmeters.nl/>



Een **venturimeter** is een instrument voor het meten van de hoeveelheid gas of vloeistof die door een buis stroomt. Hij bestaat uit een in de pijpleiding aangebrachte vernauwing met een daarbij behorend meetinstrument voor het hierdoor veroorzaakte drukverval. De bijbehorende formule luidt:

Venturimeter: $\Delta p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2)$

- Opgave 12 Bij een venturibuis meten we een drukverschil van 24000 Pa. De hoogste vloeistofsnelheid bedraagt 10 m/s. De dichtheid van de getransporteerde vloeistof is 1200 kg/m³. Bereken de laagste vloeistofsnelheid.
- Opgave 13 In een venturibuis is de oppervlakte van de kleinste en de grootste doorsnede respectievelijk 10 cm² en 50 cm². Door de buis stroomt water dat in het wijde deel een stroomsnelheid van 2 m/s heeft. Hoe groot is het drukverschil?
- Opgave 14 In een venturibuis is de grootste diameter 10 cm en de kleinste diameter 7 cm. Door de buis stroomt 30 liter water per minuut. Bereken het drukverschil.
- Opgave 15 Een tank is tot een hoogte van 12 m gevuld met een vloeistof. In de zijwand moeten we een gat maken op een zodanige hoogte dat de uitstroomsnelheid de helft bedraagt van de snelheid waarmee de vloeistof zou wegstromen uit een gat in de bodem. Op welke hoogte moeten we dat gat in de tank aanbrenge?



De **Pitotbuis** is een instrument voor het meten van de druk in een gas- of vloeistofstroom. Uit het drukverschil kan de snelheid van de stroom berekend worden.

Pitot-buis: $\Delta p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$

- Opgave 16 Bij een Pitot-buis is het opgemeten drukverschil 8160 Pa.
De dichtheid van de vloeistof bedraagt 1020 kg/m^3 .
De middellijn van de buis waarin de Pitot-buis is geplaatst bedraagt 16 cm.
a) Hoe groot is de snelheid van de vloeistof?
b) Hoeveel kg vloeistof wordt per uur doorgevoerd als we aannemen dat de stroomsnelheid in de buis overal even groot is?
- Opgave 17 Met behulp van een Pitot-buis wordt in een leiding een stroomsnelheid van 30 m/s en een drukverschil van 360 kPa gemeten.
Bereken de dichtheid van de vloeistof.
- Opgave 18 Een vloeistof met een dichtheid van 1200 kg/m^3 wordt met behulp van een pomp 15 m omhoog gepompt. Op die hoogte heeft de vloeistof een uitstroomsnelheid van 4 m/s uit een buis met een diameter van 2 cm.
Hoe groot moet de druk op de vloeistof aan het begin zijn als daar de buis een diameter heeft van 8 cm en de buitendruk 100 kPa bedraagt?
We verwaarlozen de verliezen in de buis.

Bij het transport van vloeistoffen en gassen door leidingen ontstaan, door turbulentie en wrijving langs de wand, energieverliezen die gecompenseerd moeten worden door een groter pomp- of compressievermogen. Bij transport over grote afstanden kunnen deze verliezen aanzienlijk zijn. Verschillende methoden ter verlaging van de stromingsweerstand zijn onder andere succesvol toegepast in de luchtvaart-, scheepvaart-, olie- en gasindustrie. Enkele van deze methoden bieden ook perspectieven voor toepassing in warmtedistributieleidingen zoals het toevoegen van additieven, het aanbrengen van een gladde coating aan de binnenzijde van de buis, het toepassen van profielen en het aanbrengen van schoepen in de bochten. Deze methoden kunnen een vermindering van de stromingsweerstand opleveren van 10-75%.

Voor de berekening van het wrijvingsverlies p_w in een ronde leiding geldt de Darcy-formule:

$$p_w = f \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$

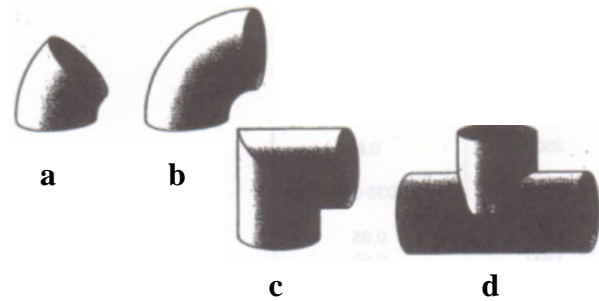
Daarbij is f de Darcy frictiefactor die van de soort leiding en de vloeistof afhangt, l is de lengte van de leiding, d de diameter, ρ de soortelijke massa en v de snelheid van de vloeistof.

De volgende tabel geeft een aantal waarden voor f :

Leidingmateriaal en vloeistof	f
koperen buis (10 mm Ø) met water	0,027
koperen buis (30 mm Ø) met water	0,020
stalen buis (10 mm Ø) met water	0,029
stalen buis (30 mm Ø) met water	0,022
plastic slang (75 mm Ø) met water	0,012
rubberen slang (75 mm Ø) met water	0,021

Appendages zoals bochten en afsluiters veroorzaken natuurlijk ook wrijvingsverliezen. Een methode om deze te berekenen is het meetellen van een *equivalente lengte*:

Appendage	Equivalente lengte
bocht van 45° (a)	15 x diameter
bocht van 90° (b)	40 x diameter
haakse bocht (c)	60 x diameter
T-stuk (d)	60 x diameter
schuifafsluiter (1/4 open)	800 x diameter
schuifafsluiter (1/2 open)	200 x diameter
schuifafsluiter (3/4 open)	40 x diameter



Voorbeeld: twee koperen buizen met elk een lengte van 5 m en een diameter van 30 mm zijn verbonden door een bocht van 90°. Door de buizen stroomt water met een snelheid van 2 m/s. Bereken de verliesdruk p_w .

Oplossing: De bocht betekent een equivalente lengte van $40 \times 30 \text{ mm} = 1200 \text{ mm} = 1,2 \text{ m}$. Bij de buislengte van in totaal $2 \times 5 = 10 \text{ m}$ moeten we dus 1,2 m optellen zodat:
 $l = 10 + 1,2 = 11,2 \text{ m}$. Invulling van de formule voor p_w levert vervolgens:

$$p_w = 0,02 \times \frac{11,2}{30 \cdot 10^{-3}} \times \frac{1}{2} \times 1000 \times 2^2 = 14933 \text{ Pa}$$

Opgave 19 De buis van 15 m lengte uit opgave 18 heeft een wrijvingscoëfficiënt van 0,025. Bovendien bevinden zich drie bochten van 90° in de buis. Bereken nogmaals de druk op de vloeistof aan het begin als we de wrijvingsverliezen niet verwaarlozen

Antwoorden stromingsleer

- 1 18 m/s
- 2 70.7 s
- 3 a) $q_V = 60 \text{ l/min} = 0,001 \text{ m}^3/\text{s}$ (bedenk dat 1 liter = 1 dm³)
 b) $v = 12,73 \text{ m/s}$
 c) $q_M = \rho \cdot q_V \rightarrow q_M = 1000 \times 0,001 = 1 \text{ kg/s}$
- 4 0,0118 m²/s
- 5 a) 113 b) laminair
- 6 0,84 cm
- 7 0,12 m/s
- 8 a) 4,4721 m/s b) 0,00107 m³/s
- 9 1,25 m
- 10 501948,8 N/m²
- 11 a) 0,8 m b) 0,00064 m³/s
- 12 7,75 m/s
- 13 48000 N/m²
- 14 6,41 N/m²
- 15 diepte 3 m dus hoogte 9 m
- 16 a) 4 m/s b) 295290 kg
- 17 $\Delta p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \Rightarrow 360000 = \frac{1}{2} \times \rho \times 30^2 \Rightarrow$
 $\rho = \frac{360000}{\frac{1}{2} \times 30^2} = 800 \text{ kg/m}^3$
- 18 $p_1 + \cancel{1200 \times 10 \times 0} + \frac{1}{2} \times 1200 \times 0,25^2 = 100000 + 1200 \times 10 \times 15 + \frac{1}{2} \times 1200 \times 4^2 \Rightarrow$
 $p_1 = 2,896 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 2,896 \text{ bar}$
- 19 $l = 15 + 3 \times (40 \times 0,02) = 17,4 \text{ m} \Rightarrow$
 $p_w = 0,025 \times \frac{17,4}{0,02} \times \frac{1}{2} \times 1200 \times 4^2 = 2,088 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 2,088 \text{ bar} \Rightarrow$
 $p_{1,w} = p_1 + p_w \Rightarrow p_{1,w} = 2,896 + 2,088 = 4,984 \text{ bar}$