

Inleiding

In 1609 publiceerde de wiskundige en astronoom [Johannes Kepler](#) (1571-1630) zijn beroemde werk [Astronomia Nova seu Physica coelestis](#). Hierin ontvouwde hij zijn berekeningen van de planeetbewegingen en de wetmatigheden die daarmee verband houden.

Om tot deze inzichten te komen kon hij zich baseren op een grote hoeveelheid waarnemingsmateriaal, die door zijn leermeester en begunstiger [Tycho Brahe](#) (1546-1601) op het eiland [Hven](#) was verzameld. Brahe had, dankzij de ruime financiële middelen die hem door de Deense koning ter beschikking waren gesteld, twee zeer goed uitgeruste observatoria op het eiland gebouwd. Daarbij had hij de beschikking over een aantal van de (voor zijn tijd) meest geavanceerde meetinstrumenten, waarmee de positie van sterren en planeten nauwkeurig kon worden bepaald. De metingen werden met het blote oog uitgevoerd, want de telescoop was nog niet uitgevonden.

In 1599 vertrok Tycho Brahe naar Praag, waar hij in contact kwam met Johannes Kepler. Vlak voor Brahe's dood kreeg Kepler de beschikking over diens gegevens, waarmee hij aan de slag ging om een nauwkeurige planeetbaan te berekenen. Het kostte hem 5 jaar, voordat hij zijn eerste exacte planeetbaan, die van Mars, had bepaald. Allereerst ontdekte hij de wet van de 'gelijke oppervlakken' (Kepler's tweede wet, zie hieronder). Vervolgens ontdekte hij, dat de baan van Mars en de andere planeten geen [epicykel](#) was, zoals [Claudius Ptolemaeus](#) (ca. 90-160) en [Nicolaus Copernicus](#) (1473-1543) hadden beweerd, maar een ellips. Zijn derde wet (zie hieronder) ontdekte Kepler zo'n 10 jaar later en is uiteengezet in zijn boek [Harmonices Mundi](#) (1619).

[Kepler's drie wetten](#) kunnen als volgt [geformuleerd](#) worden:

1. De planeten beschrijven ellipsvormige banen rond de zon, waarbij de zon in een van de brandpunten staat.
2. De beweging van de planeten is zodanig, dat de voerstraal (de verbindingslijn van de zon en de planeet) in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakken bestrijkt.
3. De verhouding van het kwadraat van de omwentelingstijd (periode) en de derde macht van de halve lange as van de ellips is voor alle planeten constant.

De door Kepler empirisch gevonden wetten konden zo'n 75 jaar later door [Isaac Newton](#) (1643-1727) verklaard worden met behulp van het begrip [zwaartekracht](#), zoals dat in zijn hoofdwerk [Philosophiae Naturalis Principia Mathematica](#) (1687) is beschreven. Bovendien is Newton de ontdekker van de [differentiaal](#)- en [integraalrekening](#), het benodigde gereedschap om de planeetbewegingen wiskundig te beschrijven.

De vergelijking van de ellips in poolcoördinaten

Volgens de eerste wet van Kepler draaien de planeten in ellipsvormige banen om de zon, waarbij de zon in een van de brandpunten staat. In figuur 1 is zo'n ellipsvormige baan weergegeven, waarbij het punt P de positie van de planeet op een bepaald tijdstip weergeeft. De zon staat in het rechter brandpunt S van de ellips, dat tevens de oorsprong van het coördinatenstelsel met x- en y-as vormt. De snijpunten van de ellips met de x-as worden gevormd door het perihelium Π , waarin de planeet de zon het dichtste nadert, en het aphelium A, de positie van de planeet met de grootste afstand tot de zon. Het punt O is het middelpunt van de ellips.

De positie P van het hemellichaam wordt beschreven door de coördinaten r en θ , die als volgt zijn gedefiniëerd:

- de voerstraal r met $r = PS$ de afstand van het hemellichaam tot de zon;
- de ware anomalie θ met $\theta = \angle P\Omega S$ de hoek van de voerstraal met de x-as, gemeten vanaf het perihelium.

Om de ellips te karakteriseren zijn de volgende parameters van belang:

- de halve lange as a met $a = O\Pi = OA$ (1)
- de halve korte as b met $b = OB = OB'$
- de brandpuntsafstand c met $c = OS = OS'$
- de excentriciteit e met $e = \frac{c}{a}$ ($0 \leq e < 1$) (1)
- de ellipsparameter p met $p = a(1 - e^2)$ ($p \leq a$) (2)

Voor elk punt van de ellips geldt per definitie: $PS + PS' = 2a = \text{constant}$ (3)

Hieruit volgt ook: $BS + BS' = 2a \rightarrow BS = BS' = a \rightarrow a^2 = b^2 + c^2$ (4)

Verder geldt:

$$x = KS = r \cos \theta \quad y = KP = r \sin \theta \quad r = PS = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5)$$

De vergelijking van de ellips kan worden afgeleid door toepassen van (1), (2) en (3):

$$PS = r \quad \text{en} \quad PS' = \sqrt{S'K^2 + KP^2} = \sqrt{(2c + x)^2 + y^2}$$

$$PS + PS' = 2a = r + \sqrt{(2c + r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = r + \sqrt{4c^2 + 4rc \cos \theta + r^2}$$

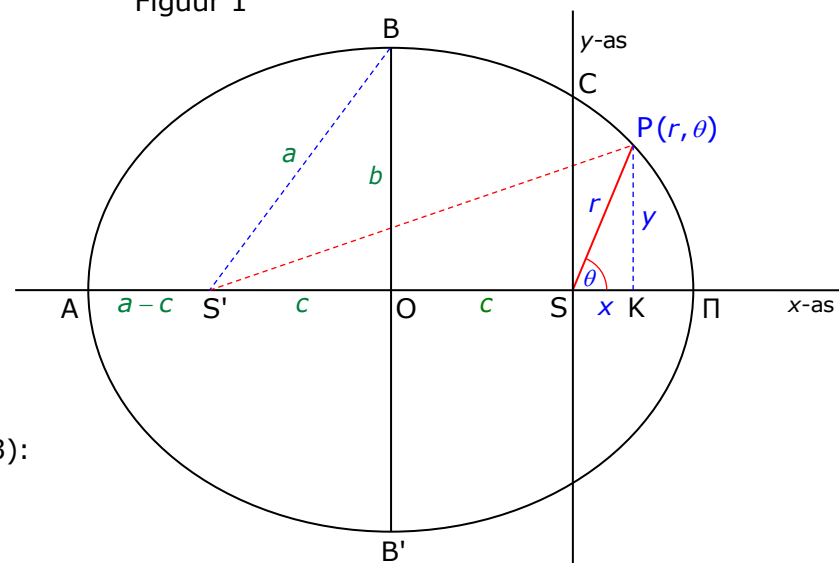
$$(2a - r)^2 = 4c^2 + 4rc \cos \theta + r^2 \rightarrow a^2 - ar = c^2 + rc \cos \theta$$

$$a^2 - c^2 = b^2 = r(a + c \cos \theta) \rightarrow \frac{a^2 - c^2}{a} = r(1 + \frac{c}{a} \cos \theta) \rightarrow a(1 - \frac{c^2}{a^2}) = a(1 - e^2) = p = r(1 + e \cos \theta)$$

Hieruit volgt de vergelijking van de ellips in poolcoördinaten:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (6)$$

Figuur 1



De vergelijking (6) kan worden opgelost voor enkele karakteristieke hoeken θ , gebruik makend van definitie (2):

$$\bullet \quad \theta = 0 \quad \rightarrow \quad r = \frac{p}{1 + e \cos 0} = \frac{p}{1 + e} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = a(1 - e) = \text{PS} \quad \text{afstand perihelium-zon} \quad (7)$$

$$\bullet \quad \theta = \frac{1}{2}\pi \quad \rightarrow \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \frac{1}{2}\pi} = p = \text{SC} \quad \text{geometrische betekenis van de ellipsparameter } p \quad (8)$$

$$\bullet \quad \theta = \pi \quad \rightarrow \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \pi} = \frac{p}{1 - e} = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e} = a(1 + e) = \text{AS} \quad \text{afstand aphelium-zon} \quad (9)$$

Verder geldt nog, bij toepassing van de formules (1), (2), (4) en (7):

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (10)$$

$$c = \text{OS} = \text{OP} - \text{PS} = a - a(1 - e) = ae \quad (11)$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - (ae)^2 = a^2(1 - e^2) = ap \quad \rightarrow \quad b = a\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{ap} \quad (12)$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} \quad (13)$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{p}{1 - e^2} \sqrt{1 - e^2} = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (14)$$

$$p = \frac{b^2}{a} \quad (15)$$

$$e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (16)$$

In het geval dat de excentriciteit e gelijk wordt aan 0, geldt $a = b = p$ en gaat de ellips over in een cirkel.

Nadert de excentriciteit e naar de waarde 1, dan benadert de vorm van de baan een **parabool**.

De raaklijn aan de ellips

Bij zeer kleine verplaatsingen in zijn baan om de zon is de beweging van een planeet bij benadering gericht langs de raaklijn aan de ellips. In het vervolg zal blijken, dat de richting van deze raaklijn bij de snelheid van belang is.

In figuur 2 is zo'n raaklijn getekend, rakend aan de ellips in punt P. Deze maakt een hoek α met de x-as. Er zal nu worden afgeleid, hoe deze hoek kan worden uitgedrukt in de ware anomalie θ .

In rechthoekige coördinaten wordt de helling van de raaklijn gegeven door: $\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$

Differentiëren van de formules (5) $x = r \cos \theta$ en $y = r \sin \theta$ geeft:

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \quad \text{en} \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \quad (17)$$

De helling van de raaklijn is dus gelijk aan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta}{\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta} = \frac{\sin \theta dr - \frac{r \cos \theta}{\sin \theta} d(\cos \theta)}{\cos \theta dr + r d(\cos \theta)} \quad (18)$$

Differentiëren van de baanvergelijking (6) $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ geeft het volgende resultaat:

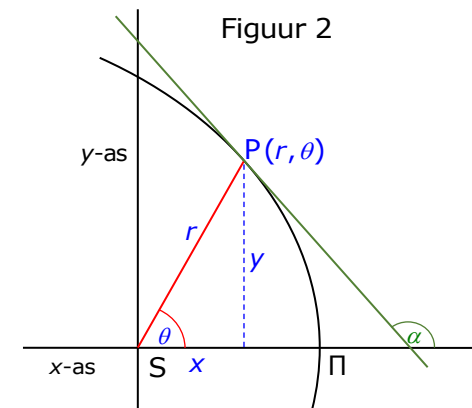
$$dr = \frac{pe \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = \left(\frac{p}{1 + e \cos \theta}\right)^2 \frac{e}{p} \sin \theta d\theta = \frac{e}{p} r^2 \sin \theta d\theta = -\frac{e}{p} r^2 d(\cos \theta) \quad (19)$$

Invullen van de rechter uitdrukking van dr in vergelijking (18) en vervolgens teller en noemer vermenigvuldigen met $\frac{p}{r^2} \sin \theta$ geeft:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-e \sin^2 \theta - \frac{p}{r} \cos \theta}{-e \cos \theta \sin \theta + \frac{p}{r} \sin \theta} = -\frac{e(1 - \cos^2 \theta) + \frac{p}{r} \cos \theta}{\sin \theta(-e \cos \theta + \frac{p}{r})} = -\frac{e + \cos \theta(-e \cos \theta + \frac{p}{r})}{\sin \theta(-e \cos \theta + \frac{p}{r})}$$

Uit de baanvergelijking (6) volgt $-e \cos \theta + \frac{p}{r} = 1$, waarmee het verband tussen α en θ onmiddellijk blijkt:

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{e + \cos \theta}{\sin \theta} \quad (20)$$



De perkenwet en de baanbeweging

Volgens de tweede wet van Kepler (de perkenwet) bestrijkt de voerstraal (de verbindingslijn zon-planeet) in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakken. Deze wetmatigheid kan worden gebruikt om de beweging van de planeet als functie van de tijd te beschrijven.

Beschouw daartoe figuur 3, waar een klein gedeelte van de baan is weergegeven. De planeet verplaatst zich daarin van positie P naar positie P'. In een zeer korte tijdsperiode dt neemt daarbij de voerstraal in lengte toe van r naar $r + dr$, terwijl de ware anomalie toeneemt met het kleine hoekje $d\theta$. De voerstraal bestrijkt hierbij het oppervlak van de ellipssector PSP'.

De sectoroppervlakte dA kan benaderd worden door een driehoek, omdat het boogje PP' als rechte lijn beschouwd kan worden. Bij benadering geldt dan:

$$dA = \frac{1}{2} r(r + dr) \sin(d\theta) \cong \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Volgens de tweede wet van Kepler is deze oppervlakte evenredig met de verstreken tijd dt (met evenredigheidsconstante h), zodat in het infinitesimale geval het volgende geldt:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = h = \text{constant} \quad (\text{tweede wet van Kepler}) \quad (21)$$

De perkenwet kan ook in rechthoekige coördinaten geformuleerd worden, als gebruik wordt gemaakt van de formules (5):

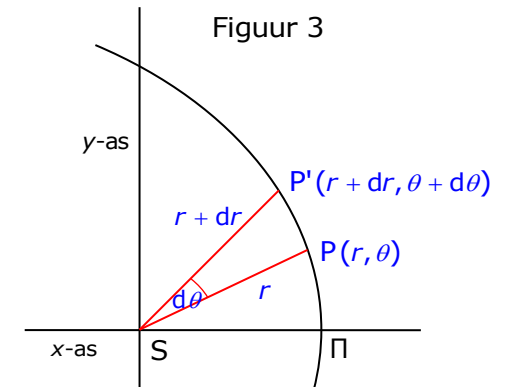
$$x = r \cos \theta \quad \text{en} \quad y = r \sin \theta \quad \rightarrow \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

Differentiëren naar de tijd van de laatstgenoemde formule levert dan:

$$\frac{d(\tan \theta)}{dt} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{x^2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \quad \rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2 \theta}{x^2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \frac{1}{r^2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \quad \rightarrow \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$$

Invullen van het laatste in vergelijking (21) geeft dan:
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = h = \text{constant} \quad (22)$$

De differentiaalvergelijking (21) maakt het mogelijk de constante h te bepalen, als de periode (omlooptijd) van de planeet bekend is. De periode T is de tijd, die de planeet nodig heeft om de ellipsvormige baan in zijn geheel te doorlopen, zodat de voerstraal het gehele oppervlak van de ellips bestrijkt. Daarbij loopt de ware anomalie van $\theta = 0$ tot $\theta = 2\pi$.



Gebruik makend van formule (12) geldt voor de oppervlakte van de ellips (zie ook de afleiding in [appendix A](#)):

$$A(\text{ellips}) = \pi ab = \pi a\sqrt{ap} = \pi a^{3/2}\sqrt{p}$$

Integreren van de vergelijking (21) geeft dan:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = h \int_0^T dt \quad \text{met} \quad \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = A(\text{ellips}) = \pi a^{3/2}\sqrt{p} \quad \text{en} \quad h \int_0^T dt = ht \Big|_0^T = hT$$

waaruit volgt:
$$h = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi a^{3/2}\sqrt{p}}{T} \quad (23)$$

Onder de aanname, dat de factor $\frac{h^2}{p}$ constant is en identiek voor alle hemellichamen, die in ellipsvormige banen rond de zon bewegen, is de formule (23) in feite een wiskundige formulering van de derde wet van Kepler (zie ook pagina 12 en 13):

De verhouding van het kwadraat van de omwentelingsperiode T en de derde macht van de halve lange as a is voor alle planeten constant.

Immers:
$$\frac{1}{\pi^2} \frac{h^2}{p} = \frac{a^3}{T^2} = \text{constant} \quad (\text{derde wet van Kepler}) \quad (24)$$

Om de ware anomalie θ van de planeet op een willekeurig tijdstip t te berekenen, dient de wiskundige formulering (21) van de tweede wet van Kepler te worden geïntegreerd. Hierbij kunnen de vergelijking van de ellips (6) en de constante h (23) worden benut:

$$A(t) = \int_0^\theta \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{p^2 d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = h \int_{t_0}^t dt = \frac{\pi ab}{T} (t - t_0) \quad \rightarrow \quad A(t) = \frac{1}{2} p^2 \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{\pi ab}{T} (t - t_0) \quad (25)$$

$A(t)$ is hier de door de voerstraal bestreken oppervlakte bij de ware anomalie θ op tijdstip t , gerekend vanaf $\theta = 0$ op tijdstip t_0 . De waarde t_0 geeft het tijdstip aan, waarop de planeet het perihelium passeert (waarbij de ware anomalie $\theta = 0$).

De integraal (25) is niet eenvoudig op te lossen. Daartoe dient eerst een hulpparameter E , de excentrische anomalie, te worden geïntroduceerd.

De excentrische anomalie

In navolging van Kepler wordt de ellips voorzien van een omgeschreven cirkel, zodat de straal ervan gelijk is aan de halve lange as a . Het punt P' is het snijpunt van deze cirkel met de loodlijn door P op de x -as. Wanneer de planeet in punt P zich langs de ellips beweegt, beweegt dit punt P' over de cirkel mee. De hoek tussen het lijnstuk OP' en de x -as wordt de **excentrische anomalie** E genoemd, dus $E = \angle \Pi OP'$ (zie figuur 4). Het perihelium en aphelium zijn de enige twee punten waarbij $E = \theta$.

Door de formules (5) en (11) toe te passen, is een verband tussen de drie variabelen E , θ en r uit de figuur eenvoudig af te leiden:

$$x = r \cos \theta = OK - OS = a \cos E - ae = a(\cos E - e) \quad (26)$$

Een ander verband tussen de variabelen E en r is als volgt te vinden:

Volgens de definitie (2) en formule (6) geldt: $r + er \cos \theta = p = a(1 - e^2)$

Relatie (26) vermenigvuldigen met e geeft: $er \cos \theta = ae \cos E - ae^2$

Aftrekken van de twee bovenstaande resultaten geeft dan:

$$r = a - ae \cos E = a(1 - e \cos E) \quad (27)$$

Een derde verband is te vinden via de welbekende eigenschap van de ellips, dat de verhouding van de y -coördinaat van punten P op de ellips en de y -coördinaat van de corresponderende punten P' op de omgeschreven cirkel volgens (13) gelijk is aan:

$$\frac{KP}{KP'} = \frac{OB}{OC} = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

Omdat $KP = y = r \sin \theta$ en $KP' = a \sin E$ geldt dus: $y = r \sin \theta = b \sin E = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (28)$

Deze vergelijking is ook af te leiden uit louter de vergelijkingen (26) en (27). Zie hiervoor [appendix B](#).

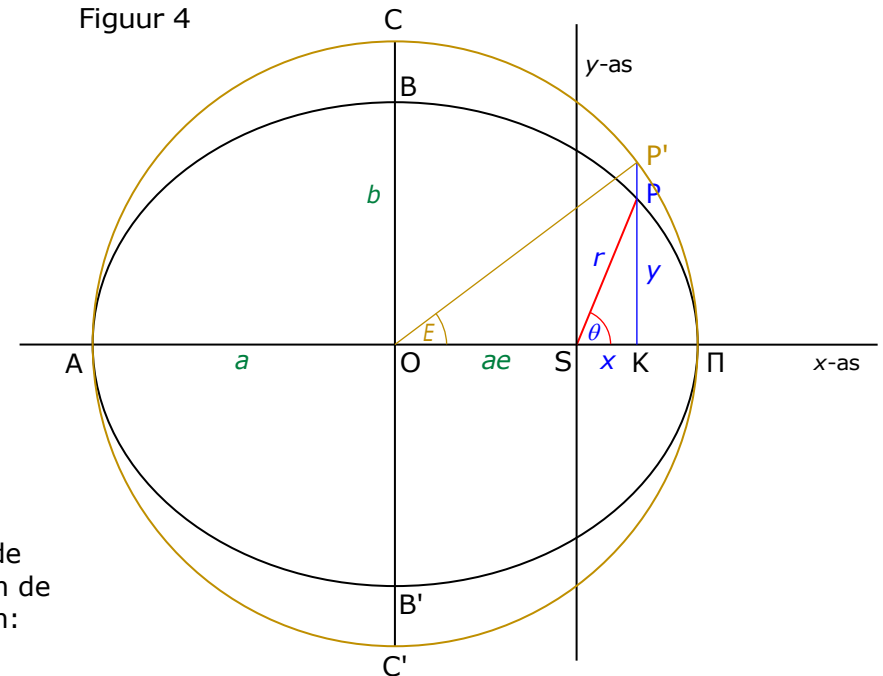
Er is ook een direct verband tussen de ware anomalie θ en de excentrische anomalie E af te leiden.

Aftrekken en optellen van de vergelijkingen (26) en (27) geeft respectievelijk:

$$r - r \cos \theta = a - ae \cos E - a \cos E + ae \quad \rightarrow \quad r(1 - \cos \theta) = a(1 + e)(1 - \cos E)$$

$$r + r \cos \theta = a - ae \cos E + a \cos E - ae \quad \rightarrow \quad r(1 + \cos \theta) = a(1 - e)(1 + \cos E)$$

Figuur 4



Door over te gaan op de halve hoek via de goniometrische identiteiten $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta$ en $1 - \cos E = 2 \sin^2 \frac{1}{2} E$ resp.

$1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta$ en $1 + \cos E = 2 \cos^2 \frac{1}{2} E$ ontstaan na worteltrekken de volgende vergelijkingen:

$$\sqrt{r} \sin \frac{1}{2} \theta = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E \quad \text{en} \quad \sqrt{r} \cos \frac{1}{2} \theta = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E \quad (29)$$

zodat door deling van de vergelijkingen (29) volgt: $\tan \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{1}{2} E$ (30)

De vergelijking van Kepler

Met behulp van de hierboven geïntroduceerde excentrische anomalie E kan vergelijking (25) worden geïntegreerd.

Differentiëren van vergelijking (27) $r = a(1 - e \cos E)$ geeft: $dr = ae \sin E dE$ (31)

Volgens (19) geeft differentiëren van de baanvergelijking: $dr = \frac{e}{p} r^2 \sin \theta d\theta$

Gelijkstelling van de twee laatste resultaten levert dan: $\frac{p^2 d\theta}{(1+e \cos \theta)^2} = r^2 d\theta = ap \frac{\sin E}{\sin \theta} dE = b^2 \frac{\sin E}{\sin \theta} dE$

Vergelijking (28) geeft $\frac{\sin E}{\sin \theta} = \frac{r}{b}$, zodat: $\frac{p^2 d\theta}{(1+e \cos \theta)^2} = br dE$

Substitutie van r via vergelijking (27) leidt vervolgens tot: $\frac{p^2 d\theta}{(1+e \cos \theta)^2} = ab(1 - e \cos E) dE$

Voor de integraal (25) kan nu geschreven worden:

$$A(t) = \frac{1}{2} p^2 \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e \cos \theta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^E ab(1 - e \cos E) dE = \frac{1}{2} ab(E - e \sin E) \Big|_0^E = \frac{1}{2} ab(E - e \sin E) = \frac{\pi ab}{T} (t - t_0)$$

Het uiteindelijke resultaat is de **vergelijking van Kepler**: $E - e \sin E = \frac{2\pi}{T} (t - t_0) = M$ (32)

De factor $\frac{2\pi}{T}(t - t_0)$ wordt ook wel de [middelbare anomalie](#) M genoemd, dus $M = \frac{2\pi}{T}(t - t_0)$ (33)

Dit komt overeen met de hoek, die gedurende de omloop van de planeet evenredig met de tijd van 0 tot 2π toeneemt. De middelbare anomalie is op te vatten als de hoek van een fictief hemellichaam, dat met constante snelheid een cirkelvormige baan beschrijft met dezelfde periode als de planeet. In het perihelium Π en het aphelium A zijn alle anomalieën gelijk, dus $\theta_{\Pi} = E_{\Pi} = M_{\Pi} = 0$ respectievelijk $\theta_A = E_A = M_A = \pi$.

De vergelijking van Kepler is een [transcedente vergelijking](#), waaruit de excentrische anomalie E alleen [iteratief](#) kan worden opgelost. Bij kleine excentriciteiten e is de volgende iteratieformule bijzonder geschikt:

$$E_n = M + e \sin E_{n-1} \quad (34)$$

waarbij als beginwaarde $E_0 = M$ kan worden genomen. De berekening dient zolang te worden voortgezet, totdat de succesievelijk berekende excentrische anomalieën binnen de vereiste nauwkeurigheid gelijk worden: $E_n = E_{n-1}$.

Bij grotere waarden van de excentriciteit convergeert formule (34) slecht, zodat beter de volgende methode kan worden gebruikt:

$$E_n = E_{n-1} + \frac{M + e \sin E_{n-1} - E_{n-1}}{1 - e \cos E_{n-1}} \quad (35)$$

Ook hier kan $E_0 = M$ als beginwaarde worden genomen. De laatste formule berust op de [methode van Newton-Raphson](#), waarvan een afleiding te vinden is in [appendix L](#).

Zodra de waarde van E bekend is, kunnen de rechthoekige coördinaten x en y worden berekend via de formules (26) en (28). De voerstraal r en de ware anomalie θ kunnen worden bepaald via de formules (27) en (30).

Ook de door de voerstraal bestreken oppervlakte $A(t)$ kan nu volgens de formules (25) en (32) berekend worden via:

$$A(t) = h(t - t_0) = \frac{\pi ab}{T}(t - t_0) = \frac{\pi a^{3/2} \sqrt{p}}{T}(t - t_0) = \frac{1}{2} a^{3/2} \sqrt{p} \cdot (E - e \sin E) \quad (36)$$

In Kepler's tijd was de differentiaal- en integraalrekening nog niet uitgevonden. Kepler heeft de vergelijking (32) dan ook via meetkundige weg gevonden. Zie hiervoor [appendix C](#), waar een geometrische afleiding te vinden is.

De snelheid van de planeet

Als de planeet zijn ellipsvormige baan doorloopt, verandert de grootte en de richting van de snelheid voortdurend, afhankelijk van de afstand tot de zon. De snelheid is gericht langs de raaklijn aan de ellips (zie figuur 5).

Voor de snelheid V geldt (zie ook [appendix D](#) voor een afleiding):

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (37)$$

Volgens formule (19) geldt: $\frac{dr}{dt} = \frac{e}{p} r^2 \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$ (38)

en volgens formule (21) $\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \rightarrow r \frac{d\theta}{dt} = \frac{2h}{r}$ (39)

Combinatie van beide resultaten en toepassen van de baanvergelijking (6) geeft vervolgens:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2h}{p} e \sin \theta \quad \text{en} \quad r \frac{d\theta}{dt} = \frac{2h}{r} = \frac{2h}{p} (1 + e \cos \theta) \quad (40)$$

Invullen van de formules (40) in de formule voor de snelheid (37) levert:

$$\begin{aligned} V^2 &= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4h^2}{p^2} e^2 \sin^2 \theta + \frac{4h^2}{p^2} (1 + e \cos \theta)^2 = \frac{4h^2}{p^2} (e^2 \sin^2 \theta + 1 + 2e \cos \theta + e^2 \cos^2 \theta) = \\ &= \frac{4h^2}{p^2} (1 + 2e \cos \theta + e^2) = \frac{4h^2}{p} \left(2 \cdot \frac{1 + e \cos \theta}{p} - \frac{1 - e^2}{p}\right) = \frac{4h^2}{p} \left(\frac{2}{r} - \frac{1 - e^2}{p}\right) = \frac{4h^2}{p} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

Voor de factor $\frac{4h^2}{p}$ geldt volgens (24): $\frac{4h^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$

De uiteindelijke formule voor de snelheid wordt dus:

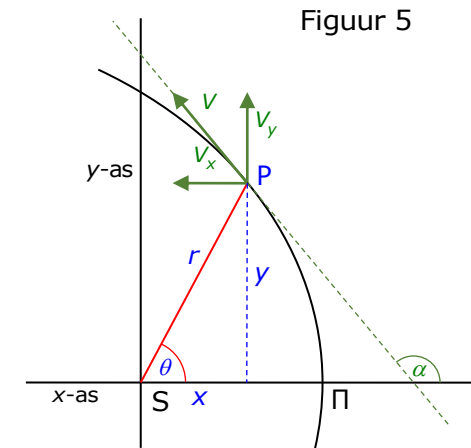
$$V = \frac{2\pi a^{3/2}}{T} \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}} \quad (41)$$

In het perihelium is de snelheid maximaal en gelijk aan:

$$V_{\max} = \frac{2\pi a^{3/2}}{T} \sqrt{\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (42)$$

In het aphelium bereikt de snelheid zijn minimale waarde:

$$V_{\min} = \frac{2\pi a^{3/2}}{T} \sqrt{\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a}} = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad (43)$$



De snelheidscomponenten en de versnelling

De in formule (37) gegeven snelheidscomponenten kunnen ook afzonderlijk worden berekend, uitgaande van de formules (17):

$$\frac{dx}{dt} = \cos \theta \frac{dr}{dt} - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = \sin \theta \frac{dr}{dt} + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (44)$$

Volgens (40) geldt:

$$r \frac{d\theta}{dt} = \frac{2h}{r} = \frac{2h}{p} (1 + e \cos \theta)$$

Daarom is formule (38) te schrijven als:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e}{p} r^2 \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 2h \frac{e}{p} \sin \theta$$

Substitutie van de laatste formules levert, bij toepassing van $er \cos \theta - p = -r$ via de baanvergelijking (6):

$$\frac{dx}{dt} = 2h \frac{e}{p} \sin \theta \cos \theta - \frac{2h}{r} \sin \theta = \frac{2h \sin \theta}{pr} (er \cos \theta - p) = \frac{2h \sin \theta}{pr} \cdot -r \quad \rightarrow \quad V_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{2h}{p} \sin \theta \quad (45)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2h \frac{e}{p} \sin^2 \theta + \frac{2h}{p} \cos \theta \cdot (1 + e \cos \theta) = \frac{2h}{p} (e \sin^2 \theta + \cos \theta + e \cos^2 \theta) \quad \rightarrow \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{2h}{p} (e + \cos \theta) \quad (46)$$

Het quotiënt van de snelheidscomponenten geeft $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha = -\frac{e + \cos \theta}{\sin \theta}$, zodat de richting van snelheid samenvalt met die van de raaklijn, overeenkomstig de formule (20).

Bovendien geldt: $V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{4h^2}{p^2} (\sin^2 \theta + (e + \cos \theta)^2) = \frac{4h^2}{p^2} (\sin^2 \theta + e^2 + 2e \cos \theta + \cos^2 \theta) = \frac{4h^2}{p^2} (1 + 2e \cos \theta + e^2)$,

wat geheel in overeenstemming is met het tussenresultaat bij de afleiding van de snelheidsformule (41).

Nu de snelheidscomponenten bekend zijn, kan de versnelling van de planeet worden berekend.

Differentiëren van de snelheidscomponenten naar de tijd, gebruik makend van formule (21), namelijk $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2h}{r^2}$, geeft:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{2h}{p} \sin \theta \right) = -\frac{2h}{p} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{2h}{p} \cos \theta \cdot \frac{2h}{r^2} \quad \rightarrow \quad a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4h^2}{p} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (47)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{2h}{p} (e + \cos \theta) \right) = -\frac{2h}{p} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{2h}{p} \sin \theta \cdot \frac{2h}{r^2} \quad \rightarrow \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4h^2}{p} \frac{\sin \theta}{r^2} \quad (48)$$

De versnelling a (niet te verwarren met het symbool voor de halve lange as van de ellips) wordt dan:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2 = \frac{16h^4}{p^2} \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{r^4} = \frac{16h^4}{p^2} \frac{1}{r^4} \quad \rightarrow \quad a = -\frac{4h^2}{p} \frac{1}{r^2} \quad (49)$$

Hieruit blijkt, dat de grootte van de versnelling omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand tot de zon. Dit ligt ten grondslag aan de gravitatie theorie van Newton.

De richting van de versnelling wordt bepaald door het quotiënt van de horizontale en verticale versnellingscomponent.

Voor dit quotiënt geldt $\frac{a_y}{a_x} = \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} = \tan \theta$, dus de versnelling is gericht volgens de voerstraal (de verbindinglijn planeet-zon). Uit het feit dat zowel a_x en a_y (in het eerste kwadrant) negatief zijn, kan worden afgeleid, dat de versnelling naar de zon toe is gericht.

De derde wet van Kepler en de gravitatieconstante

De versnelling volgens formule (49) wijst op een centrale, door de zon uitgeoefende, aantrekkende kracht. Het is alleen onwaarschijnlijk, dat de versnelling nog zou afhangen van de vorm van de baan, zoals de ellipsparameter p in deze formule suggereert.

Volgens formule (24) toont de derde wet van Kepler dan ook aan, dat de factor $\frac{4h^2}{p}$ voor alle planeten in het zonnestelsel een constante, voor de zon karakteristieke factor is. Hieruit volgt, dat de evenredigheidsfactor h bij Kepler's tweede wet omgekeerd evenredig is met de wortel uit de parameter p .

De aantrekkingskracht van de zon op een planeet met massa m is (volgens Newton) dus te noteren als: $F = ma = \frac{4h^2}{p} \frac{m}{r^2}$ (50)

De onderstaande tabel geeft de factor $\frac{4h^2}{p}$ voor 8 planeten, 1 dwergplaneet en 1 planetoïde in ons zonnestelsel (bron: NASA 2016).

Object	a (AE)	e	T (dagen)	$\frac{4h^2}{p} \cdot 10^4$	Object	a (AE)	e	T (dagen)	$\frac{4h^2}{p} \cdot 10^4$
Mercurius	0,387099	0,205630	87,9690	2,9591	Vesta	2,768134	0,075705	1682,21	2,9591
Venus	0,723332	0,006773	224,701	2,9591	Jupiter	5,203360	0,048393	4332,59	2,9629
Aarde	1,000000	0,016710	365,256	2,9591	Saturnus	9,537070	0,054151	10759,2	2,9583
Mars	1,523662	0,093412	686,980	2,9590	Uranus	19,19126	0,047168	30685,4	2,9635
Ceres	2,361348	0,089067	1325,37	2,9591	Neptunus	30,06896	0,008586	60189,0	2,9627

De halve lange a is gegeven in astronomische eenheden (AE). De [astronomische eenheid](#) is de gemiddelde afstand van de aarde tot de zon. De periode T is gegeven in dagen.

Voor de kleinere planeten, de dwergplaneet Ceres en de planetoïde Vesta is de constante $\frac{4h^2}{p}$ nagenoeg gelijk.

Bij de grotere planeten treden kleine afwijkingen op. Dit komt omdat de massa van deze planeten zo groot is, dat deze niet meer mag worden verwaarloosd ten opzichte van de (veel grotere) massa van de zon.

Als de massa van het object wel verwaarloosbaar is, geldt volgens Newton's zwaartekrachtheorie: $\frac{4h^2}{p} = GM$,

waarbij:

- G de [gravitatieconstante](#) is, ook wel constante van [Cavendish](#) genoemd;
- M is de massa van de zon.

Volgens formule (24) kan Kepler's derde wet dus als volgt worden geformuleerd:

$$\frac{1}{\pi^2} \frac{h^2}{p} = \frac{a^3}{T^2} = \text{constant} \quad \rightarrow \quad \frac{GM}{4\pi^2} = \frac{a^3}{T^2} = \text{constant} \quad (51)$$

Invullen van de constante GM in formule (50) leidt onmiddellijk tot de [gravitatiewet](#) van Newton: $F = G \frac{Mm}{r^2}$ (52)

Bepaling van de baan van een planetoïde of komeet in het baanvlak uit 2 gegeven posities

In ons zonnestelsel wordt voor objecten, die in ellipsvormige banen rond de zon bewegen, de [gravitatieconstante van Gauss](#) gebruikt, een

constante met symbool k , gedefinieerd als:
$$k = \sqrt{GM} = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\mu}} \cdot \frac{a^{3/2}}{T} = 0,01720209895 \quad (53)$$

Hierbij is G de constante van Cavendish, M de zonsmassa en μ de massa van het object, uitgedrukt in zonsmassa's. De halve lange as van de ellipsvormige baan a wordt gegeven in astronomische eenheden (AE) en T is de omlooptijd van het object om de zon in dagen. Zie [appendix E](#) voor een nadere toelichting op formule (53), waarbij tevens de exacte grootte van de constante k wordt berekend.

Bij planetoïden en kometen is μ totaal verwaarloosbaar ten opzichte van de factor 1: vergelijk daarvoor formule (51).

Volgens de derde wet van Kepler in (23) en (24) geldt dan:
$$k = 2\pi \frac{a^{3/2}}{T} = \frac{2h}{\sqrt{p}} = \text{constant} \quad \text{en} \quad \frac{2\pi}{T} = \frac{2h}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{a^{3/2}} = \frac{k}{a^{3/2}} \quad (54)$$

Als op 2 verschillende momenten de planetoïde- of komeetpositie bekend is, kunnen de baanparameters nauwkeurig berekend worden. Dit zijn de halve lange as a en de excentriciteit e van de ellipsvormige baan alsook het tijdstip van periheliumpassage t_0 .

Zie hiervoor figuur 6, waar 2 posities $P_1(r_1, \theta_1)$ voor tijdstip t_1 resp. $P_2(r_2, \theta_2)$ voor tijdstip t_2 zijn weergegeven.

Als de voerstralen r_1 en r_2 en de ware anomalieën θ_1 en θ_2 gegeven zijn, kunnen de parameter p en de excentriciteit e berekend

worden via de baanvergelijking (6):
$$r_1 = \frac{p}{1 + e \cos \theta_1} \quad \text{en} \quad r_2 = \frac{p}{1 + e \cos \theta_2}$$

$$e = \frac{p - r_1}{r_1 \cos \theta_1} = \frac{p - r_2}{r_2 \cos \theta_2} \quad \rightarrow \quad p = \frac{r_1 r_2 (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}{r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1} \quad p = r_1 + r_1 e \cos \theta_1 = r_2 + r_2 e \cos \theta_2 \quad \rightarrow \quad e = \frac{r_1 - r_2}{r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1} \quad (55)$$

Volgens (10) en (54) kunnen de halve lange as a en de omlooptijd T berekend worden via:
$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad \text{en} \quad T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{k}$$

Het tijdstip van periheliumpassage t_0 vereist berekening van de excentrische anomalie volgens (30) uit een van de ware anomalieën:

$$\tan \frac{1}{2} E_1 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{1}{2} \theta_1 \quad \rightarrow \quad E_1 = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{1}{2} \theta_1 \right)$$

De waarde van t_0 is dan volgens (32):
$$t_0 = t_1 - \frac{T}{2\pi} (E_1 - e \sin E_1) \quad \text{of} \quad t_0 = t_1 - \frac{a^{3/2}}{k} (E_1 - e \sin E_1) \quad (56)$$

Wanneer alleen het tweede tijdstip gegeven is, dienen in de vorige formules de gegevens θ_2 , E_2 en t_2 te worden gebruikt.

Hieruit blijkt, dat als beide voerstralen en ware anomalieën gegeven zijn, slechts één van de tijdstippen t_1 of t_2 bekend hoeft te zijn.

In de astronomische praktijk doet zich het geval voor, dat beide tijdstippen wel bekend zijn, maar niet beide ware anomalieën.

[Carl Friedrich Gauss](#) (1777-1855) heeft aangetoond, dat slechts het verschil $2f = \theta_2 - \theta_1$ nodig is en ontwikkelde hiervoor een methode, die nog steeds in gebruik is. Deze speelt een belangrijke rol bij de bepaling van de baan van objecten in het zonnestelsel uit slechts 3 gegeven posities, waarbij tevens de ruimtelijke oriëntatie van het baanvlak wordt vastgelegd. Dit laatste gebeurt door middel van 3 extra parameters, die samen met de reeds genoemde baanparameters de 6 zogeheten [baanelementen](#) vormen.

In 1802 wist hij hiermee de baan van [Ceres](#) te berekenen, voorspelde de positie ervan en maakte hiermee de (her)ontdekking van deze eerst gevonden planetoïde mogelijk. Inmiddels zijn er duizenden planetoïden bekend. Deze prestatie vestigde meteen zijn reputatie als astronoom, hoewel hij in 1801 met zijn [Disquisitiones arithmeticae](#) als wiskundige al bekendheid had verworven. In 1807 werd hij benoemd tot directeur van het astronomisch observatorium in Göttingen en hoogleraar sterrenkunde aldaar, welke functie hij tot het eind van zijn leven zou bekleden.

Bij de genoemde methode speelt de oppervlakteverhouding van sector en driehoek een sleutelrol.

Deze verhouding is als volgt gedefiniëerd:
$$\eta = \frac{A_{\text{sector}}}{A_{\text{driehoek}}} = \frac{\text{oppervlakte ellipssector } SP_1P_2}{\text{oppervlakte driehoek } SP_1P_2}$$

Stel $\tau = k(t_2 - t_1)$, dan geldt voor de oppervlakte van de ellipssector volgens (36) en (54):

$$A_{\text{sector}} = A(SP_1P_2) = A(\Pi SP_2) - A(\Pi SP_1) = h(t_2 - t_0) - h(t_1 - t_0) = h(t_2 - t_1) = \frac{1}{2} k \sqrt{\rho} (t_2 - t_1) = \frac{1}{2} \tau \sqrt{\rho}$$

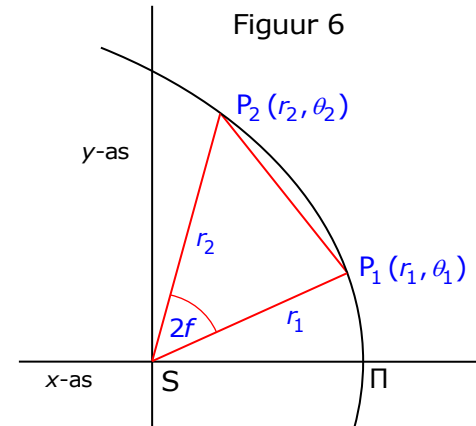
Door als eenheid van tijd $\tau = kt$ te nemen in plaats van t , wordt de constante k als het ware in de tijd verdisconteerd. Hierdoor komt deze constante in de vergelijkingen verder niet meer voor.

Beschouw SP_1 als basis van de driehoek SP_1P_2 met lengte r_1 en trek een loodlijn vanuit P_2 op SP_1 . Deze loodlijn vormt dan de hoogte van deze driehoek met lengte $r_2 \sin 2f$, zodat:

$$A_{\text{driehoek}} = \frac{1}{2} \cdot \text{basis} \cdot \text{hoogte} = \frac{1}{2} \cdot r_1 \cdot r_2 \sin 2f$$

Voor de oppervlakteverhouding van sector en driehoek geldt dus:
$$\eta = \frac{A_{\text{sector}}}{A_{\text{driehoek}}} = \frac{\tau \sqrt{\rho}}{r_1 r_2 \sin 2f} \quad (57)$$

Gauss zag zich voor de opgave gesteld, de oppervlakteverhouding η te berekenen uit de gegevens r_1 , r_2 , f en τ . Hoe hij dit probleem wist op te lossen zal op de volgende pagina's worden uitgelegd.



Figuur 6

De oppervlakteverhouding van sector/driehoek

In de formule (57) zijn r_1, r_2, f en τ bekende variabelen, behalve de ellipsparameter p . Hiervoor geldt volgens (2): $p = a(1 - e^2)$. Als de oppervlakteverhouding η kan worden berekend, volgt daaruit direct de grootte van p .

Via de baanvergelijkingen $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ voor beide posities is dan de excentriciteit e te berekenen, waaruit via (2) onmiddellijk de halve lange as a en via (54) de periode (omlooptijd) volgt. Beide excentrische anomalieën E_1 en E_2 zijn vervolgens via formule (30) te bepalen, waarna ook het tijdstip van periheliumpassage te berekenen is volgens (56).

Ter berekening van de grootte van η staan de formules (29) en (32) ter beschikking, terwijl volgens (54) geldt dat $\frac{2\pi}{T} = \frac{k}{a^{3/2}}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{r_1} \sin \frac{1}{2} \theta_1 &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_1 & \sqrt{r_1} \cos \frac{1}{2} \theta_1 &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_1 & E_1 - e \sin E_1 &= \frac{k}{a^{3/2}} (t_1 - t_0) \\ \sqrt{r_2} \sin \frac{1}{2} \theta_2 &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_2 & \sqrt{r_2} \cos \frac{1}{2} \theta_2 &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_2 & E_2 - e \sin E_2 &= \frac{k}{a^{3/2}} (t_2 - t_0) \end{aligned}$$

Combinatie van de bovenstaande formules levert de volgende vier vergelijkingen op (zie [appendix F](#) voor de afleiding):

Daarbij zijn de volgende variabelen geïntroduceerd: $\theta_2 - \theta_1 = 2f$ $E_2 - E_1 = 2g$ $E_2 + E_1 = 2G$ $\tau = k(t_2 - t_1)$

$$\bullet \quad \sqrt{r_1 r_2} \cos f = a(\cos g - e \cos G) \quad (58)$$

$$\bullet \quad \sqrt{r_1 r_2} \sin f = \sqrt{ap} \sin g \quad (59)$$

$$\bullet \quad r_1 + r_2 = 2a - 2ae \cos g \cos G \quad (60)$$

$$\bullet \quad \frac{\tau}{a^{3/2}} = 2g - 2e \sin g \cos G \quad (61)$$

De factor $e \cos G$ in (60) en (61) kan worden geëlimineerd door substitutie van $e \cos G = \cos g - \frac{\sqrt{r_1 r_2} \cos f}{a}$ volgens vergelijking (58):

$$r_1 + r_2 - 2a = 2a \cos g \left(\cos g - \frac{\sqrt{r_1 r_2} \cos f}{a} \right) \quad \rightarrow \quad r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f \cos g = 2a - 2a \cos^2 g = 2a \sin^2 g \quad (62)$$

$$\frac{\tau}{a^{3/2}} = 2g - 2 \sin g \left(\cos g - \frac{\sqrt{r_1 r_2} \cos f}{a} \right) = 2g - \sin 2g + \frac{2\sqrt{r_1 r_2} \cos f \sin g}{a} \quad (63)$$

De factor $\sqrt{\rho}$ in (57) kan worden geëlimineerd door substitutie van $\sqrt{\rho} = \frac{\sqrt{r_1 r_2} \sin f}{\sqrt{a} \sin g}$ volgens vergelijking (59):

$$\eta = \frac{\tau \sqrt{\rho}}{r_1 r_2 \sin 2f} = \frac{\tau \sqrt{\rho}}{2r_1 r_2 \sin f \cos f} = \frac{\tau \cdot \frac{\sqrt{r_1 r_2} \sin f}{\sqrt{a} \sin g}}{2r_1 r_2 \sin f \cos f} = \frac{\tau}{2\sqrt{a} \sqrt{r_1 r_2} \cos f \sin g} \quad (64)$$

De onbekenden in de vergelijkingen (62), (63) en (64) zijn a , g en η . Door eliminatie van a blijven 2 vergelijkingen in g en η over.

Uit de vergelijking (64) volgt namelijk: $a = \frac{\tau^2}{4\eta^2 r_1 r_2 \cos^2 f \sin^2 g}$ en $a^{3/2} = \frac{\tau^3}{8\eta^3 (\sqrt{r_1 r_2})^3 \cos^3 f \sin^3 g}$

Substitutie van a in vergelijking (62) geeft: $r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f \cos g = \frac{\tau^2}{2\eta^2 r_1 r_2 \cos^2 f} \rightarrow$

$$\rightarrow 4\sqrt{r_1 r_2} \cos f \left(\frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_1 r_2} \cos f} - \frac{1}{2} \cos g \right) = \frac{\tau^2}{2\eta^2 r_1 r_2 \cos^2 f} \rightarrow \frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_1 r_2} \cos f} - \frac{1}{2} \cos g = \frac{\tau^2}{8\eta^2 (\sqrt{r_1 r_2})^3 \cos^3 f}$$

In de laatste vergelijking wordt $\cos g$ vervangen door $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} g$: $\frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_1 r_2} \cos f} - \frac{1}{2} + \sin^2 \frac{1}{2} g = \frac{\tau^2}{8\eta^2 (\sqrt{r_1 r_2})^3 \cos^3 f} \quad (65)$

Substitutie van $a^{3/2}$ resp. a in vergelijking (63) geeft: $\frac{8\eta^3 (\sqrt{r_1 r_2})^3 \cos^3 f \sin^3 g}{\tau^2} = 2g - \sin 2g + \frac{8\eta^2 (\sqrt{r_1 r_2})^3 \cos^3 f \sin^3 g}{\tau^2} \quad (66)$

Vergelijkingen (65) en (66) kunnen aanzienlijk vereenvoudigd worden door de volgende variabelen μ en λ te introduceren:

$$\mu = \frac{\tau^2}{(2\sqrt{r_1 r_2} \cos f)^3} \quad \text{en} \quad \lambda = \frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_1 r_2} \cos f} - \frac{1}{2} \quad (67)$$

Substitutie van μ en λ in (65): $\lambda + \sin^2 \frac{1}{2} g = \frac{\mu}{\eta^2} \rightarrow \eta^2 = \frac{\mu}{\lambda + \sin^2 \frac{1}{2} g} \quad (68)$

Substitutie van μ in (66): $\frac{\eta^3}{\mu} \sin^3 g = 2g - \sin 2g + \frac{\eta^2}{\mu} \sin^3 g \rightarrow \eta^3 - \eta^2 = \frac{\mu(2g - \sin 2g)}{\sin^3 g} \quad (69)$

Oplossen van η uit de 2 vergelijkingen

De oppervlakteverhouding van sector en driehoek η uit de vergelijkingen $\eta^2 = \frac{\mu}{\lambda + \sin^2 \frac{1}{2}g}$ en $\eta^3 - \eta^2 = \frac{\mu(2g - \sin 2g)}{\sin^3 g}$ kan worden

opgelost door eliminatie van g , wat wordt vereenvoudigd door de tweede vergelijking (69) te delen door de eerste (68).

Stel daarbij: $\xi = \sin^2 \frac{1}{2}g$ en $X(\xi) = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}$, dan ontstaat de vergelijking: $\eta = 1 + X(\xi)(\lambda + \xi)$ (70)

Met een startwaarde van g kan dan ξ en $X(\xi)$ worden berekend, waarmee via (70) een eerste benadering van η wordt verkregen.

Een verbeterde waarde van ξ wordt dan berekend via (68) met $\eta^2 = \frac{\mu}{\lambda + \xi}$, waaruit ξ volgt met: $\xi = \frac{\mu}{\eta^2} - \lambda$ (71)

Vervolgens worden de vergelijkingen (70) en (71) afwisselend zo lang benut, totdat η met voldoende nauwkeurigheid bekend is.

Als een zwak excentrische baan wordt verondersteld kan $g = f$ als startwaarde van de iteratie worden genomen. Bij een cirkelbaan geldt immers $g = \frac{1}{2}(E_2 - E_1) = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) = f$, omdat $e = 0$ en $\theta = E$. Bij hoge excentriciteit lijkt de baan meer op een parabool (zoals kometen), zodat $g = 0$ als startwaarde van de iteratie kan dienen. Zie ook [appendix K](#) voor de parabool als grensgeval van de ellips.

Zodra een iteratiestap via (71) een nieuwe waarde van ξ heeft opgeleverd, dienen de waarden van g , $\sin g$ en $\sin 2g$ opnieuw berekend te worden. Dit om bij (70) een verbeterde waarde van $X(\xi)$ te verkrijgen, waarbij de betrekkingen (73) kunnen worden benut:

$$\cos g = 1 - 2\xi \quad \sin g = 2\sqrt{\xi(1-\xi)} \quad \sin 2g = 2 \sin g \cos g \quad g = \arcsin(\sin g)$$

Deze berekeningsstappen kunnen worden vermeden door $X(\xi) = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}$ in een [machtreeks](#) uit te drukken als functie van $\xi = \sin^2 \frac{1}{2}g$,

waarbij $X(\xi)$ wordt voorgesteld door de reeks $X(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 + a_5\xi^5 + \dots$ (72)

Bij de publicatie van zijn boek [Theoria Motus Corporum Coelestium](#) in 1809 heeft Gauss deze [polynoom](#) als eerste vermeld.

De coëfficiënten a_n van deze reeks zullen hieronder worden afgeleid.

Daartoe worden eerst de afgeleiden van X en ξ naar g bepaald:

$$\frac{dX}{dg} \cdot \sin^3 g + 3X \sin^2 g \cos g = 2 - 2 \cos g = 4 \sin^2 g \quad \rightarrow \quad \frac{dX}{dg} \cdot \sin g + 3X \cos g = 4 \quad \text{en} \quad \frac{d\xi}{dg} = \sin \frac{1}{2} g \cos \frac{1}{2} g = \frac{1}{2} \sin g$$

Substitueren van $\frac{dX}{dg} = \frac{dX}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dg}$ in de bovenstaande vergelijking geeft dan: $\frac{1}{2} \frac{dX}{d\xi} \cdot \sin^2 g + 3X \cos g = 4$

Verder geldt: $\cos g = 1 - 2 \sin^2 \frac{g}{2} = 1 - 2\xi$ en $\sin^2 g = 1 - \cos^2 g = 1 - (1 - 2\xi)^2 = 4\xi(1 - \xi)$ (73)

Substitueren van $\cos g$ en $\sin^2 g$ levert het uiteindelijke verband tussen X en ξ : $2\xi(1 - \xi) \frac{dX}{d\xi} + 3X(1 - 2\xi) - 4 = 0$ (74)

De reeks (72): $X = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 + a_5\xi^5 + a_6\xi^6 + \dots$ heeft als afgeleide: $\frac{dX}{d\xi} = a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2 + 4a_4\xi^3 + 5a_5\xi^4 + \dots$

Invullen van beide veeltermen in de differentiaalvergelijking (74) en rangschikken van de termen met gelijke exponent n geeft:

$$\begin{aligned} +2\xi \frac{dX}{d\xi} &= +2a_1\xi + 4a_2\xi^2 + 6a_3\xi^3 + 8a_4\xi^4 + 10a_5\xi^5 + \dots \\ -2\xi^2 \frac{dX}{d\xi} &= -2a_1\xi^2 - 4a_2\xi^3 - 6a_3\xi^4 - 8a_4\xi^5 + \dots \\ +3X &= +3a_0 + 3a_1\xi + 3a_2\xi^2 + 3a_3\xi^3 + 3a_4\xi^4 + 3a_5\xi^5 + \dots \\ -6X\xi - 4 &= -4 - 6a_0\xi - 6a_1\xi^2 - 6a_2\xi^3 - 6a_3\xi^4 - 6a_4\xi^5 + \dots = 0 \end{aligned}$$

Door vergelijking van de coëfficiënten bij overeenkomstige machten van ξ kan het volgende worden geconcludeerd:

$$\begin{aligned} 3a_0 - 4 &= 0 \quad \rightarrow \quad a_0 = \frac{4}{3} \\ -6a_0 + 5a_1 &= 0 \quad \rightarrow \quad a_1 = a_0 \cdot \frac{6}{5} \\ -8a_1 + 7a_2 &= 0 \quad \rightarrow \quad a_2 = a_0 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} = a_0 \cdot \frac{48}{35} \\ -10a_2 + 9a_3 &= 0 \quad \rightarrow \quad a_3 = a_0 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} = a_0 \cdot \frac{32}{21} \\ -12a_3 + 11a_4 &= 0 \quad \rightarrow \quad a_4 = a_0 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} = a_0 \cdot \frac{128}{77} \end{aligned}$$

Algemeen: $a_n = a_0 \cdot \prod_{i=1}^n \frac{2i+4}{2i+3}$

$$-14a_4 + 13a_5 = 0 \rightarrow a_5 = a_0 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{14}{13} = a_0 \cdot \frac{256}{143}$$

Resultaat:
$$X(\xi) = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{6}{5}\xi + \frac{48}{35}\xi^2 + \frac{32}{21}\xi^3 + \frac{128}{77}\xi^4 + \frac{256}{143}\xi^5 + \dots \right) \quad (75)$$

De coëfficiënten a_n zijn groter dan 1 en nemen langzaam in grootte toe. De reeks zal alleen convergeren bij zeer kleine waarden van ξ .

Omdat $\xi = \sin^2 \frac{1}{2}g = \sin^2 \frac{1}{4}(E_2 - E_1)$, is deze machtreeks dus alleen geschikt voor 2 posities die heel dicht bij elkaar liggen.

Gauss realiseerde zich, dat de reeks (75) lijkt op de meetkundige reeks: $\frac{4}{3} \left(1 + \frac{6}{5}\xi + \left(\frac{6}{5}\xi\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\xi\right)^3 + \dots \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - 6/5 \cdot \xi} < X(\xi)$

en corrigeerde ξ met een kleine factor ν , zodat $X(\xi) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - 6/5(\xi - \nu)}$, waarbij ν te ontwikkelen is in een polynoom als functie van ξ .

Omdat $\nu = \frac{10}{9X(\xi)} - \frac{5}{6} + \xi$, is de reeksontwikkeling van $\frac{1}{X(\xi)}$ vereist. De afleiding van de polynoomcoëfficiënten van deze laatste reeks is

ingewikkelder dan die van $X(\xi)$, maar het resultaat is als volgt:
$$\frac{1}{X(\xi)} = \frac{3}{4} - \frac{9}{10}\xi + \frac{9}{175}\xi^2 + \frac{26}{875}\xi^3 + \frac{6228}{336875}\xi^4 + \dots \quad (76)$$

Invullen van de laatste reeks in de vergelijking voor ν geeft dan:
$$\nu(\xi) = \frac{2}{35}\xi^2 + \frac{52}{1575}\xi^3 + \frac{1384}{67375}\xi^4 + \frac{59088}{4379375}\xi^5 + \dots \quad (77)$$

Hieruit blijkt, dat $\nu(\xi)$ slechts termen van de tweede en hogere orde bevat. De waarde van $X(\xi)$ wordt verkregen door ν na berekening met (77) in te vullen in $X(\xi) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - 6/5(\xi - \nu)}$. Zie [appendix G](#) voor meer polynoomcoëfficiënten en de afleiding ervan.

Comfortabeler is het, de reeks (76) te nemen in plaats van de reeks (77), zodat $X(\xi)$ simpelweg als reciproke waarde te verkrijgen is.

Door beide reeksen af te kappen bij de n^e term ontstaat een fout $|\Delta X(\xi)|$, die slechts afhangt van de grootte van $\xi = \sin^2 \frac{1}{2}g$.

Het minimaal vereiste aantal termen van beide laatste reeksen als functie van g bij een nauwkeurigheid van $|\Delta X(\xi)| < 5 \cdot 10^{-9}$ is als volgt:

g (graden)		5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
Aantal termen n		3	4	4	5	6	6	7	7	8	9	10	11	12	13	15	17	19

Een alternatieve reeks voor X

Volgens vergelijking (74) geldt: $2\xi(1-\xi)\frac{dX}{d\xi} + 3X(1-2\xi) - 4 = 0$, waarbij $\xi = \sin^2 \frac{1}{2}g$ met $\frac{1}{2}g < \frac{1}{4}\pi$, dus $0 < \xi < \frac{1}{2}$

Een iets convergentere machtreeks kan worden verkregen door $\tan^2 \frac{1}{2}g$ als parameter te nemen, in plaats van $\sin^2 \frac{1}{2}g$.

$$\text{Stel: } \zeta = \tan^2 \frac{1}{2}g = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}g}{\cos^2 \frac{1}{2}g} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}g}{1 - \sin^2 \frac{1}{2}g} = \frac{\xi}{1-\xi} \quad \text{met} \quad 0 < \zeta < 1 \quad (78)$$

Zoals eenvoudig af te leiden is, bestaan volgens definitie (78) en de differentiaalvergelijking (74) tussen ξ en ζ de volgende relaties:

$$\xi = \frac{\zeta}{1+\zeta} \quad 1-\xi = \frac{1}{1+\zeta} \quad \frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{(1-\xi) + \xi}{(1-\xi)^2} = \frac{1}{(1-\xi)^2} = (1+\zeta)^2 \quad \frac{dX}{d\xi} = \frac{d\zeta}{d\xi} \cdot \frac{dX}{d\zeta} = (1+\zeta)^2 \frac{dX}{d\zeta} \quad (79)$$

Door substitutie van deze relaties kan vergelijking (74) worden omgezet in:

$$2 \frac{\zeta}{(1+\zeta)^2} \cdot (1+\zeta)^2 \frac{dX}{d\zeta} + 3X \left(1 - \frac{2\zeta}{1+\zeta}\right) - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 2\zeta(1+\zeta) \frac{dX}{d\zeta} + 3X(1-\zeta) - 4\zeta - 4 = 0 \quad (80)$$

De variabele X is te ontwikkelen in een polynoom als functie van variabele ζ , overeenkomstig de op pagina 19 toegepaste werkwijze.

Stel deze machtreeks als volgt voor: $X(\zeta) = b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + b_3\zeta^3 + b_4\zeta^4 + b_5\zeta^5 + \dots$ (81)

De afgeleide van deze reeks is dan: $\frac{dX}{d\zeta} = b_1 + 2b_2\zeta + 3b_3\zeta^2 + 4b_4\zeta^3 + 5b_5\zeta^4 + \dots$

De termen b_n worden afgeleid door substitutie van de reeks $X(\zeta)$ en zijn afgeleide in de differentiaalvergelijking (80):

$$\begin{aligned} +2\zeta \frac{dX}{d\zeta} &= +2b_1\zeta + 4b_2\zeta^2 + 6b_3\zeta^3 + 8b_4\zeta^4 + 10b_5\zeta^5 + \dots \\ +2\zeta^2 \frac{dX}{d\zeta} &= +2b_1\zeta^2 + 4b_2\zeta^3 + 6b_3\zeta^4 + 8b_4\zeta^5 + \dots \\ +3X &= +3b_0 + 3b_1\zeta + 3b_2\zeta^2 + 3b_3\zeta^3 + 3b_4\zeta^4 + 3b_5\zeta^5 + \dots \\ -3X\zeta &= -3b_0\zeta - 3b_1\zeta^2 - 3b_2\zeta^3 - 3b_3\zeta^4 - 3b_4\zeta^5 + \dots \\ -4\zeta - 4 &= -4 - 4\zeta = 0 \end{aligned}$$

Door vergelijking van de coëfficiënten bij overeenkomstige machten van ζ kan het volgende worden geconcludeerd:

$$\begin{aligned}
 3b_0 - 4 = 0 &\rightarrow b_0 = +4 \cdot \frac{1}{3} = +8 \cdot \frac{1}{6} = +\frac{8}{6} \\
 5b_1 - 3b_0 = 4 &\rightarrow b_1 = +\frac{6}{5}b_0 = -8 \cdot \frac{3}{-1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5} = +\frac{8}{5} \\
 7b_2 - 1b_1 = 0 &\rightarrow b_2 = +\frac{1}{7}b_1 = +8 \cdot \frac{3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = +\frac{8}{35} && \text{voor } n \geq 1: && b_n = 8 \cdot \frac{3 \cdot (-1)^n}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \\
 9b_3 + 1b_2 = 0 &\rightarrow b_3 = -\frac{1}{9}b_2 = -8 \cdot \frac{3}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} = -\frac{8}{315} && \text{voor } n \geq 2: && b_{n+1} = -b_n \cdot \frac{2n-3}{2n+5} \\
 11b_4 + 3b_3 = 0 &\rightarrow b_4 = -\frac{3}{11}b_3 = +8 \cdot \frac{3}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} = +\frac{8}{1155} \\
 13b_5 + 5b_4 = 0 &\rightarrow b_5 = -\frac{5}{13}b_4 = -8 \cdot \frac{3}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} = -\frac{8}{3003} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Resultaat:
$$X(\zeta) = 8 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\zeta + \frac{1}{35}\zeta^2 - \frac{1}{315}\zeta^3 + \frac{1}{1155}\zeta^4 - \frac{1}{3003}\zeta^5 - \dots \right) \quad \text{met} \quad \zeta = \frac{\xi}{1-\xi} = \tan^2 \frac{1}{2}g \quad (82)$$

Omdat de bepaling van η alleen zin heeft bij $2g < \pi$ (180 graden), geldt $\zeta = \tan^2 \frac{1}{2}g < 1$ zodat de reeks $X(\zeta)$ dus altijd convergeert.

Wanneer de reeks $X(\zeta)$ wordt afgebroken bij de n^e term b_n , kan de maximale fout $|\Delta X|$ in de reeks worden geschat door alle termen volgend op b_n een coëfficiënt te geven, die gelijk is aan b_n . De afbreekfout is dan wat groter dan de feitelijke waarde.

Zouden b_n en alle erop volgende coëfficiënten verwaarloosd worden, dan is de afbreekfout kleiner dan $b_n \cdot \zeta^n$ (alternerende reeks).

Het afgebroken gedeelte is op deze wijze voor te stellen als:
$$|b_n \zeta^n - b_n \zeta^{n+1} + b_n \zeta^{n+2} - b_n \zeta^{n+3} + \dots| = |b_n| \cdot \zeta^n \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \zeta^i$$

met $|b_n| = 8 \cdot \frac{3}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ en de meetkundige reeks $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \zeta^i = \frac{1}{1+\zeta}$, met $\zeta < 1$.

Voor de afbreekfout geldt dus:
$$|\Delta X| < \frac{24}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{\zeta^n}{1+\zeta} \quad (83)$$

Het aantal te nemen termen bij de berekening van $X(\zeta)$ hangt allereerst af van de vereiste nauwkeurigheid, maar tevens van de grootte van $\zeta = \tan^2 \frac{1}{2} g$. In de volgende tabel is te zien hoeveel termen n van de reeks minimaal vereist zijn als functie van g in graden bij een nauwkeurigheid van $|\Delta X| < 5 \cdot 10^{-9}$, berekend met formule (83):

g (graden)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
Aantal termen n	3	4	4	5	5	5	6	7	7	8	9	10	11	13	16	21	31

De convergentie van de iteratie

De convergentie van de iteratie bij de methode van Gauss, zoals beschreven op pagina 18, laat te wensen over bij aanzienlijke waarden van g (en van f), vooral bij grotere excentriciteiten van de ellipsbaan.

De oorzaak is te herleiden tot de functies (70) en (71), hier aangeduid als η_a en η_b : $\eta_a(\xi) = 1 + X(\xi)(\lambda + \xi)$ en $\eta_b(\xi) = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + \xi}}$

Voor $\eta_a(\xi)$ geldt: $\lim_{\xi \rightarrow 0} \eta_a(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} 1 + X(\xi)(\lambda + \xi) = 1 + \frac{4}{3} \lambda$. Zie [appendix H](#) voor een bewijs dat $X(0) = \frac{4}{3}$; dit volgt ook uit (74) en (75).

De eerste functie is monotoon stijgend met minimum waarde $\eta_a(0) = 1 + \frac{4}{3} \lambda$ en een maximum van $\eta_a\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{\xi \rightarrow \frac{1}{2}} 1 + X(\xi)(\lambda + \xi) = \infty$.

De tweede functie is monotoon dalend met minimum waarde $\eta_b\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2\mu}{2\lambda + 1}}$ en een maximum van $\eta_b(0) = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$.

Omdat $\eta_b(0) > \eta_a(0)$ hebben de twee functies altijd een snijpunt in het interval $0 < \xi < \frac{1}{2}$. Zie [appendix I](#) voor een bewijs.

Deze snijpunten, waarbij $\eta_a(\xi) = \eta_b(\xi)$, representeren de oplossingen η voor alle ξ in genoemd interval (immers $g < 90^\circ$ en $f < 90^\circ$).

De iteratieve methode van het afwisselend benutten van de vergelijkingen (70) en (71) laat het afweten, als tijdens de iteratie steeds grotere waarden van ξ ontstaan, die op hun beurt weer leiden tot grotere waarden van η (divergentie). Het kan er zelfs toe leiden, dat

een waarde van η , volgens (70) berekend met $\eta = 1 + X(\xi)(\lambda + \xi)$, groter kan uitvallen dan $\eta_b(0) = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$.

In zo'n geval is $\eta^2 > \frac{\mu}{\lambda}$, zodat $\lambda > \frac{\mu}{\eta^2}$ en $\xi = \frac{\mu}{\eta^2} - \lambda < 0$. Zie [appendix J](#) voor een nadere toelichting met voorbeelden.

Dit nadeel wordt ondervangen met de methode van Newton voor een stelsel van 2 simultane vergelijkingen met twee onbekenden.

Bepalen van de oppervlakteverhouding met de methode van Newton

Om het stelsel van twee vergelijkingen (70) en (71) met de [methode van Newton](#) op te lossen worden de volgende functies gedefiniëerd:

$$f(\xi, \eta) = \eta(\xi) - 1 - X(\xi)(\lambda + \xi) = 0 \quad \text{en} \quad g(\xi, \eta) = \eta^2(\xi) - \frac{\mu}{\lambda + \xi} = 0 \quad (84)$$

De oplossing (ξ_0, η_0) kan iteratief worden verkregen, opdat bij benadering voldaan is aan $f(\xi_0, \eta_0) = g(\xi_0, \eta_0) = 0$.

Daartoe worden beide functies in een [Taylor-reeks](#) ontwikkeld in de omgeving van de oplossing (ξ_0, η_0) met $\xi_0 = \xi + \Delta\xi$ en $\eta_0 = \eta + \Delta\eta$. Hierbij is (ξ, η) de geschatte oplossing en $(\Delta\xi, \Delta\eta)$ de correctie erop. Er worden alleen [partiële afgeleiden](#) van de eerste orde gebruikt, terwijl de termen van hogere orde worden genegeerd:

$$f(\xi_0, \eta_0) = f(\xi, \eta) + \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \Delta\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \Delta\eta = 0 \quad \text{en} \quad g(\xi_0, \eta_0) = g(\xi, \eta) + \frac{\partial g}{\partial \xi} \cdot \Delta\xi + \frac{\partial g}{\partial \eta} \cdot \Delta\eta = 0 \quad (85)$$

Hierbij geldt voor de partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = -\frac{dX(\xi)}{d\xi} \cdot (\xi + \lambda) - X(\xi) \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 1 \quad \frac{\partial g}{\partial \xi} = +\frac{\mu}{(\xi + \lambda)^2} \quad \frac{\partial g}{\partial \eta} = 2\eta \quad (86)$$

Bij gebruik van bijvoorbeeld de reeks (82) kan $\frac{dX(\xi)}{d\xi}$ volgens formule (79) berekend worden met:

$$\frac{dX}{d\xi} = (1 + \zeta)^2 \frac{dX}{d\zeta} = (1 + \zeta)^2 (b_1 + 2b_2\zeta + 3b_3\zeta^2 + 4b_4\zeta^3 + 5b_5\zeta^4 + \dots) \quad \text{met} \quad \zeta = \frac{\xi}{1 - \xi} \quad \text{en} \quad b_n \quad \text{van de reeks (82).}$$

De correcties $\Delta\xi$ en $\Delta\eta$ op de geschatte waarden van ξ_0 en η_0 worden opgelost uit het [stelsel van 2 lineaire vergelijkingen](#) (85).

Uit (85) en (86) volgt voor de [Jacobi-matrix](#) van partiële afgeleiden J , de matrix van functiewaarden B en de oplossingsmatrix U :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} & \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial g}{\partial \xi} & \frac{\partial g}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{dX(\xi)}{d\xi} \cdot (\xi + \lambda) - X(\xi) & 1 \\ \frac{\mu}{(\xi + \lambda)^2} & 2\eta \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -f(\xi, \eta) \\ -g(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{bmatrix} \quad (87)$$

De oplossing voor $(\Delta\xi, \Delta\eta)$ volgt dan via $U = J^{-1}B$, waarbij J^{-1} de inverse Jacobi-matrix is. De gecorrigeerde waarden $\xi + \Delta\xi$ en $\eta + \Delta\eta$ dienen als uitgangspunt voor verbeterde waarden van J en B , die opnieuw kunnen worden gebruikt. Zo kan in een zeer beperkt aantal iteraties de oplossing (ξ_0, η_0) gevonden worden, waarbij $\Delta\xi$ en $\Delta\eta$ naar nul naderen, afhankelijk van de vereiste nauwkeurigheid.

Bepaling van de baanparameters

Zodra de oppervlakteverhouding sector/driehoek η bekend is, kunnen de ellipsparameter p , de excentriciteit e , de halve lange as a , en het tijdstip van periheliumpassage t_0 berekend worden.

Allereerst wordt de parameter p bepaald door toepassing van formule (57):

$$p = \left(\frac{r_1 r_2 \sin 2f}{\tau} \right)^2 \cdot \eta^2$$

De berekening van de excentriciteit berust op gebruik van de baanvergelijkingen (6) voor beide posities, waarbij slechts de sinus en de cosinus van de hoek $2f = \theta_2 - \theta_1$ benodigd is. Om de formules te vereenvoudigen, worden hulpparameters q_1 en q_2 ingevoerd:

$$r_1 = \frac{p}{1 + e \cos \theta_1} \quad \text{met} \quad q_1 = e \cos \theta_1 = \frac{p}{r_1} - 1 \quad \text{en} \quad r_2 = \frac{p}{1 + e \cos \theta_2} \quad \text{met} \quad q_2 = e \cos \theta_2 = \frac{p}{r_2} - 1 \quad (88)$$

Dan geldt: $e \cos \theta_2 = q_2 = e \cos(\theta_1 + 2f) = e \cos \theta_1 \cos 2f - e \sin \theta_1 \sin 2f$

Substitutie van $e \cos \theta_1 = q_1$ in de vorige formule geeft: $e \sin \theta_1 = \frac{q_1 \cos 2f - q_2}{\sin 2f}$

Op analoge wijze is eenvoudig af te leiden dat: $e \sin \theta_2 = \frac{q_1 - q_2 \cos 2f}{\sin 2f}$ (89)

De excentriciteit e is nu te berekenen uit: $e^2 = (e \sin \theta_1)^2 + (e \cos \theta_1)^2 = \left(\frac{q_1 \cos 2f - q_2}{\sin 2f} \right)^2 + q_1^2 = \frac{q_1^2 - 2q_1 q_2 \cos 2f + q_2^2}{\sin^2 2f}$ (90)

De ware anomalieën kunnen via de definities (88) en de beide formules (89) in het juiste quadrant berekend worden met:

$$\tan \theta_1 = \frac{e \sin \theta_1}{e \cos \theta_1} = \frac{q_1 \cos 2f - q_2}{q_1 \sin 2f} \quad \text{en} \quad \tan \theta_2 = \frac{e \sin \theta_2}{e \cos \theta_2} = \frac{q_1 - q_2 \cos 2f}{q_2 \sin 2f} \quad (91)$$

Als een van beide ware anomalieën bekend is, volgt de andere eveneens uit het verband $\theta_2 - \theta_1 = 2f$.

De rechthoekige coördinaten zijn vervolgens via de formules (5) te berekenen met:

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1 = \frac{r_1 q_1}{e} \quad y_1 = r_1 \sin \theta_1 = \frac{r_1 (q_1 \cos 2f - q_2)}{e \sin 2f} \quad x_2 = r_2 \cos \theta_2 = \frac{r_2 q_2}{e} \quad y_2 = r_2 \sin \theta_2 = \frac{r_2 (q_1 - q_2 \cos 2f)}{e \sin 2f} \quad (92)$$

Het kwadraat van de factor $2\sqrt{r_1 r_2} \cos f$ in de constanten μ en λ bij de bepaling van de oppervlakteverhouding sector/driehoek η in (67) is op directe wijze in verband te brengen met de rechthoekige coördinaten door middel van de volgende relatie:

$$\kappa^2 = 4r_1 r_2 \cos^2 f = 4r_1 r_2 \cos^2 \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) = 2r_1 r_2 (1 + \cos(\theta_2 - \theta_1)) = 2(r_1 r_2 + r_1 \cos \theta_1 \cdot r_2 \cos \theta_2 + r_1 \sin \theta_1 \cdot r_2 \sin \theta_2) = 2(r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2) \quad (93)$$

Uitgedrukt in de variabele κ luiden de formules voor μ en λ dan: $\mu = \frac{\tau^2}{\kappa^3}$ en $\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2\kappa} - \frac{1}{2}$ (94)

De halve lange as a is volgens formule (10) te berekenen met: $a = \frac{p}{1 - e^2}$

De omlooptijd (periode) kan berekend worden met formule (54): $T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{k}$

Volgens (30) geldt voor de excentrische anomalie: $\tan \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{1}{2} \theta$, waarbij $\tan \frac{1}{2} \theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{e \sin \theta}{e + e \cos \theta}$

E_1 resp. E_2 zijn vervolgens te berekenen uit: $\tan \frac{1}{2} E_1 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \frac{q_1 \cos 2f - q_2}{(e + q_1) \sin 2f}$ en $\tan \frac{1}{2} E_2 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \frac{q_1 - q_2 \cos 2f}{(e + q_2) \sin 2f}$ (95)

Is één van de excentrische anomalieën berekend, dan volgt de andere bovendien uit de relatie $E_2 - E_1 = 2g$

De passagetijd van het hemellichaam door het perihelium is volgens formule (56): $t_0 = t_1 - \frac{a^{3/2}}{k} (E_1 - e \sin E_1)$ (96)

Eventueel kan hierbij de factor $e \sin E_1$ volgens de formules (14), (28), (88) en (89) berekend worden via:

$$e \sin E_1 = e \frac{r_1 \sin \theta_1}{b} = \frac{r_1 \sqrt{1 - e^2}}{p} \cdot e \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 + q_1} \cdot e \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 + q_1} \cdot \frac{q_1 \cos 2f - q_2}{\sin 2f} \quad (97)$$

Appendix A ([zie oppervlakte ellips](#))

Berekening van de oppervlakte van een ellips.

De oppervlakte van de ellipssector in het eerste kwadrant wordt berekend, waarbij het middelpunt van de ellips samenvalt met de oorsprong O van het coördinatenstelsel (zie nevenstaande figuur).

De vergelijking van de ellips in rechthoekige coördinaten: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

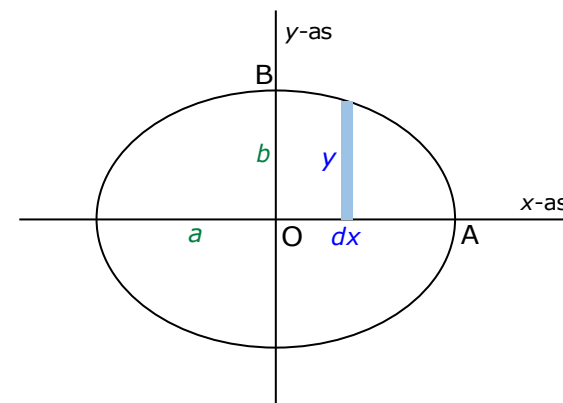
Parametervergelijking van de ellips: $x = a \cos t$ en $y = b \sin t$

Hierbij is $dx = -a \sin t dt$, terwijl de parameter t loopt van $\frac{1}{2}\pi$ tot 0.

De oppervlakte A_1 van de ellipssector OAB is dan:

$$A_1 = \int_0^a y dx = \int_{\pi/2}^0 -ab \sin^2 t dt = -\frac{1}{2} ab \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos 2t) dt = -\frac{1}{2} ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\pi/2}^0 = \frac{1}{4} \pi ab$$

De totale oppervlakte van de ellips is vier maal zo groot als A_1 , dus: $A = 4A_1 = \pi ab$



Appendix B ([zie vergelijking \(28\)](#))

Berekening van $r \sin \theta$ met behulp van de formules (22) en (23), namelijk: $r \cos \theta = a(\cos E - e)$ en $r = a(1 - e \cos E)$.

$$\begin{aligned} r^2 \sin^2 \theta &= r^2(1 - \cos^2 \theta) = r^2 - r^2 \cos^2 \theta = r^2 - a^2(\cos E - e)^2 = a^2(1 - e \cos E)^2 - a^2(\cos E - e)^2 = \\ &= a^2 - 2a^2 e \cos E + a^2 e^2 \cos^2 E - a^2 \cos^2 E + 2a^2 e \cos E - a^2 e^2 = \\ &= a^2(1 - \cos^2 E) - a^2 e^2(1 - \cos^2 E) = a^2(1 - \cos^2 E)(1 - e^2) = a^2(1 - e^2) \sin^2 E \end{aligned}$$

$$r \sin \theta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E = b \sin E$$

Appendix C ([zie Kepler's vergelijking](#))

Kepler's opgave was, de oppervlakte van de ellipssector ΠSP uit te drukken in de excentrische anomalie E .

Hij ging daarbij als volgt te werk (zie figuur 7):

$$\text{oppervlakte cirkelsector } \Pi OP' : \quad A(\Pi OP') = \frac{1}{2} a^2 E$$

$$\text{oppervlakte ellipssector } \Pi OP : \quad A(\Pi OP) = \frac{b}{a} A(\Pi OP') = \frac{1}{2} ab E$$

$$\text{De verhouding } \frac{b}{a} \text{ volgt uit: } \frac{KP}{KP'} = \frac{OB}{OC} = \frac{b}{a} \quad \text{met} \quad KP' = a \sin E$$

Voor de oppervlakte van de ellipssector ΠOP geldt eveneens:

$$A(\Pi OP) = A(\Pi SP) + A(OSP)$$

Voor de oppervlakte van driehoek OSP geldt:

$$A(OSP) = \frac{1}{2} OS \cdot KP = \frac{1}{2} OS \cdot \frac{b}{a} KP' = \frac{1}{2} ae \cdot \frac{b}{a} a \sin E = \frac{1}{2} eab \sin E$$

De oppervlakte van de ellipssector ΠSP is dus als volgt te berekenen:

$$A(\Pi SP) = A(\Pi OP) - A(OSP) = \frac{1}{2} ab E - \frac{1}{2} eab \sin E = \frac{1}{2} ab(E - e \sin E)$$

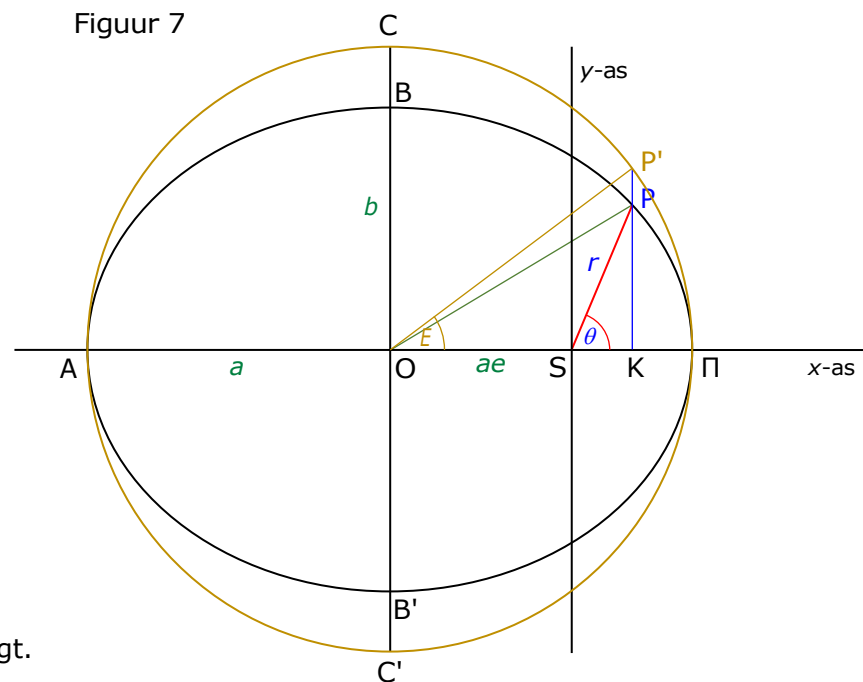
Stel, dat de sinds periheliumpassage verstreken tijd, benodigd voor het bereiken van de positie P , gelijk is aan $t - t_0$, terwijl de omlooptijd van de planeet T bedraagt.

Dan is de conclusie met betrekking tot de door de voerstraal bestreken oppervlaktes:

$$\text{verstreken tijd } t - t_0 : \quad A(\Pi SP) = \frac{1}{2} ab(E - e \sin E)$$

$$\text{verstreken tijd } T : \quad A(\text{ellips}) = \pi ab$$

$$\text{Volgens Kepler's tweede wet geldt dus: } \frac{\frac{1}{2} ab(E - e \sin E)}{t - t_0} = \frac{\pi ab}{T} \quad \rightarrow \quad E - e \sin E = \frac{2\pi}{T}(t - t_0)$$



Appendix D ([zie snelheidsformule](#))

In een rechthoekig coördinatenstelsel is de snelheid V van een planeet te ontbinden in twee componenten, namelijk een horizontale component $V_x = \frac{dx}{dt}$ en een verticale component $V_y = \frac{dy}{dt}$. Voor de snelheid V geldt dan: $V^2 = V_x^2 + V_y^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$

In een poolcoördinatenstelsel kan de snelheid worden ontbonden in een radiale component $V_r = \frac{dr}{dt}$, die gericht is volgens de verbindinglijn planeet-zon, en een circulaire component $V_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$, die hier loodrecht op staat.

Het verband tussen V , V_r en V_θ kan worden afgeleid met behulp van de in (5) gegeven formules voor x en y :

$$x = r \cos \theta \quad \text{en} \quad y = r \sin \theta$$

Kwadrateren van de formules (44), als afgeleiden naar de tijd van de formules (17), levert:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \cos \theta \frac{dr}{dt} - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \cos^2 \theta \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2r \sin \theta \cos \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \sin \theta \frac{dr}{dt} + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \sin^2 \theta \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2r \sin \theta \cos \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r^2 \cos^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Optellen van de vorige twee uitdrukkingen geeft, vanwege $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$:

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad \text{ofwel} \quad V^2 = V_x^2 + V_y^2 = V_r^2 + r^2 V_\theta^2$$

Appendix E (zie Gaussconstante)

Wanneer een object in het zonnestelsel uitsluitend interactie heeft met de zon, dan oefenen beide massa's voortdurend een even grote, maar tegengesteld gerichte kracht F op elkaar uit. Dit volgt uit Newton's derde wet: actie = - reactie.

Bovendien geldt de eerste wet van Newton: $F = M a_M = -m a = G \frac{M m}{r^2}$. Hierbij is M de zonsmassa, m de massa van het object, a_M de versnelling van de zon, a de versnelling van het object, r de onderlinge afstand en G de gravitatieconstante. Zie ook formule (52).

Hieruit volgt direct de versnelling van de zon en van het object: $a_M = G \frac{m}{r^2}$ en $a = -G \frac{M}{r^2}$, waarbij $a_M \ll a$.

Wanneer de zon geplaatst wordt in de oorsprong van het coördinatenstelsel (brandpunt van de ellips) geldt voor de relatieve versnelling van het object het verschil van beide, dus: $a = -G \frac{M+m}{r^2}$. Het minteken geeft aan, dat de versnelling naar de zon toe is gericht.

Door de versnelling a te vergelijken met formule (49), namelijk $a = -\frac{4h^2}{p} \frac{1}{r^2}$ volgt direct: $\frac{4h^2}{p} = G(M+m)$.

Dit is in overeenstemming met de formulering van Kepler's derde wet in (51), waarbij de massa m van het object te verwaarlozen is.

Betreft het grotere planeten, waarbij de massa niet verwaarloosbaar is, dan geldt bij Kepler's derde wet in plaats van (51):

$$\frac{G(M+m)}{4\pi^2} = \frac{a^3}{T^2} \quad \rightarrow \quad GM\left(1 + \frac{m}{M}\right) = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \quad \rightarrow \quad \text{met } \mu = \frac{m}{M}: \quad \sqrt{GM} = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\mu}} \cdot \frac{a^{3/2}}{T}$$

Carl Friedrich Gauss heeft de constante \sqrt{GM} , die karakteristiek is voor ons eigen zonnestelsel, het symbool k gegeven.

Bij de berekening van deze constante baseerde hij zich op de toendertijd best beschikbare waarden van μ en T voor de aarde bij haar jaarlijkse baan om de zon. De zonsmassa werd gebruikt als massa-eenheid ($M = 1$) en de siderische dag als eenheid van tijd.

Voor de massa en de siderische omlooptijd van de aarde nam hij de waarden $\mu = \frac{1}{354710}$ respectievelijk $T = 365,2563835$ dagen.

De **gravitatieconstante van Gauss** is dan te berekenen: $k = \sqrt{GM} = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\mu}} \cdot \frac{a^{3/2}}{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{1+354710^{-1}}} \cdot \frac{1^{3/2}}{365,2563835} = 0,01720209895$

In de loop van de volgende eeuw werden de massa en siderische omlooptijd van de aarde nauwkeuriger bekend, maar de **Internationale Astronomische Unie** heeft ervoor gekozen, de waarde van k als fundamentele referentiewaarde lange tijd te handhaven. De voornaamste reden was het voorkómen van aanpassing van de vele reeds berekende baanelementen van planeten, planetoïden en kometen, dat door wijziging van de Gauss-constante k teweeg zou worden gebracht.

Met moderne waarden van μ en T komt de gemiddelde afstand aarde-zon nu op 1,00000003 AE, een afwijking in de achtste decimaal.

Pas in 2009 is de definitie van k verlaten, terwijl de astronomische eenheid is geherdefiniëerd als: $1 \text{ AE} = 1,495978707 \times 10^{11} \text{ m}$.

In plaats van k wordt momenteel de waarde $\sqrt{GM} = 0,017202098947$ gebruikt.

Appendix F ([zie 4 vergelijkingen](#))

Stel: $\theta_2 - \theta_1 = 2f$ $\theta_2 + \theta_1 = 2F$ $E_2 - E_1 = 2g$ en $E_2 + E_1 = 2G$, dan geldt volgens de formules (29) voor beide posities:

$$\sqrt{r_1} \sin \frac{1}{2} \theta_1 = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_1 \quad \sqrt{r_1} \cos \frac{1}{2} \theta_1 = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_1 \quad \sqrt{r_2} \sin \frac{1}{2} \theta_2 = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_2 \quad \sqrt{r_2} \cos \frac{1}{2} \theta_2 = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_2$$

Bovendien geldt volgens de formules (32) voor beide posities: $E_1 - e \sin E_1 = \frac{k}{a^{3/2}} (t_1 - t_0)$ $E_2 - e \sin E_2 = \frac{k}{a^{3/2}} (t_2 - t_0)$

Combinatie van de formules (29) voor beide posities levert:

$$\sqrt{r_2} \cos \frac{1}{2} \theta_2 \cdot \sqrt{r_1} \cos \frac{1}{2} \theta_1 + \sqrt{r_2} \sin \frac{1}{2} \theta_2 \cdot \sqrt{r_1} \sin \frac{1}{2} \theta_1 = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_2 \cdot \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_1 + \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_2 \cdot \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_1$$

Linker lid: $\sqrt{r_2} \cos \frac{1}{2} \theta_2 \cdot \sqrt{r_1} \cos \frac{1}{2} \theta_1 + \sqrt{r_2} \sin \frac{1}{2} \theta_2 \cdot \sqrt{r_1} \sin \frac{1}{2} \theta_1 = \sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1) = \sqrt{r_1 r_2} \cos f$

Rechter lid: $\sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_2 \cdot \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_1 + \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_2 \cdot \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_1 = a(1-e) \cos \frac{1}{2} E_2 \cos \frac{1}{2} E_1 + a(1+e) \sin \frac{1}{2} E_2 \sin \frac{1}{2} E_1$

$$= a(\cos \frac{1}{2} E_2 \cos \frac{1}{2} E_1 + \sin \frac{1}{2} E_2 \sin \frac{1}{2} E_1) - ae(\cos \frac{1}{2} E_2 \cos \frac{1}{2} E_1 - \sin \frac{1}{2} E_2 \sin \frac{1}{2} E_1) = a \cos \frac{1}{2} (E_2 - E_1) - ae \cos \frac{1}{2} (E_2 + E_1) = a(\cos g - e \cos G)$$

$$\rightarrow \sqrt{r_1 r_2} \cos f = a(\cos g - e \cos G)$$

$$\sqrt{r_2} \sin \frac{1}{2} \theta_2 \cdot \sqrt{r_1} \cos \frac{1}{2} \theta_1 + \sqrt{r_2} \cos \frac{1}{2} \theta_2 \cdot \sqrt{r_1} \sin \frac{1}{2} \theta_1 = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_2 \cdot \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_1 + \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_2 \cdot \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_1$$

$$\sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1) = \sqrt{r_1 r_2} \sin f \quad = a\sqrt{(1+e)(1-e)} \cdot (\sin \frac{1}{2} E_2 \cos \frac{1}{2} E_1 - \cos \frac{1}{2} E_2 \sin \frac{1}{2} E_1) = a\sqrt{(1+e)(1-e)} \sin g = \sqrt{ap} \sin g$$

$$\rightarrow \sqrt{r_1 r_2} \sin f = \sqrt{ap} \sin g$$

Optellen van de formule (27) voor beide posities levert:

$$r_1 + r_2 = a(1 - e \cos E_1) + a(1 - e \cos E_2) = 2a - ae(\cos E_1 + \cos E_2) = 2a - 2ae \cos \frac{1}{2} (E_2 - E_1) \cdot \cos \frac{1}{2} (E_2 + E_1) = 2a - 2ae \cos g \cos G$$

De formule (32) geeft voor beide posities na aftrekken:

$$E_2 - e \sin E_2 - (E_1 - e \sin E_1) = E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1) = E_2 - E_1 - 2e \sin \frac{1}{2} (E_2 - E_1) \cdot \cos \frac{1}{2} (E_2 + E_1) = 2g - 2e \sin g \cos G$$

$$\frac{k}{a^{3/2}} (t_2 - t_0) - \frac{k}{a^{3/2}} (t_1 - t_0) = \frac{k}{a^{3/2}} (t_2 - t_1) = \frac{\tau}{a^{3/2}} \quad \rightarrow \quad \frac{\tau}{a^{3/2}} = 2g - 2e \sin g \cos G$$

Appendix G (zie polynoom X^{-1})

Stel $Z(\xi) = \frac{1}{X(\xi)}$, dan volgt hieruit $\frac{dX}{d\xi} = -\frac{1}{Z^2} \cdot \frac{dZ}{d\xi}$. De differentiaalvergelijking van $Z(\xi)$ kan worden afgeleid uit de vergelijking (74) door substitutie van X en $\frac{dX}{d\xi}$:

$$-2\xi(1-\xi) \cdot \frac{1}{Z^2(\xi)} \cdot \frac{dZ}{d\xi} + \frac{3}{Z(\xi)} \cdot (1-2\xi) - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 2\xi(1-\xi) \cdot \frac{dZ}{d\xi} + 6Z\xi - 3Z + 4Z^2 = 0$$

Stel: $Z(\xi) = z_0 + z_1\xi + z_2\xi^2 + z_3\xi^3 + z_4\xi^4 + z_5\xi^5 + z_6\xi^6 + \dots$ dus $\frac{dZ}{d\xi} = z_1 + 2z_2\xi + 3z_3\xi^2 + 4z_4\xi^3 + 5z_5\xi^4 + 6z_6\xi^5 + \dots$

Stel: $Z^2(\xi) = y_0 + y_1\xi + y_2\xi^2 + y_3\xi^3 + y_4\xi^4 + y_5\xi^5 + y_6\xi^6 + \dots = (z_0 + z_1\xi + z_2\xi^2 + z_3\xi^3 + z_4\xi^4 + z_5\xi^5 + z_6\xi^6 + \dots)^2$

Uitvermenigvuldigen van $Z^2(\xi)$ betekent voor de termen y_n , uitgedrukt in z_n :

$$\begin{array}{lll} y_0 = z_0^2 & y_4 = 2z_0z_4 + 2z_1z_3 + z_2^2 & y_8 = 2z_0z_8 + 2z_1z_7 + 2z_2z_6 + 2z_3z_5 + z_4^2 \\ y_1 = 2z_0z_1 & y_5 = 2z_0z_5 + 2z_1z_4 + 2z_2z_3 & y_9 = 2z_0z_9 + 2z_1z_8 + 2z_2z_7 + 2z_3z_6 + 2z_4z_5 \\ y_2 = 2z_0z_2 + z_1^2 & y_6 = 2z_0z_6 + 2z_1z_5 + 2z_2z_4 + z_3^2 & y_{10} = 2z_0z_{10} + 2z_1z_9 + 2z_2z_8 + 2z_3z_7 + 2z_4z_6 + z_5^2 \\ y_3 = 2z_0z_3 + 2z_1z_2 & y_7 = 2z_0z_7 + 2z_1z_6 + 2z_2z_5 + 2z_3z_4 & \text{etcetera} \end{array}$$

Zodat bij oneven $n \geq 3$: $y_n = 2z_0 \cdot z_n + 2 \sum_{i=1}^{(n-1)/2} z_i \cdot z_{n-i}$ en bij even $n \geq 4$: $y_n = 2z_0 \cdot z_n + 2 \sum_{i=1}^{n/2} z_i \cdot z_{n-i} + z_{n/2}^2$

Invullen van de veeltermen in de differentiaalvergelijking en rangschikken van de termen met gelijke exponent n geeft:

$$\begin{aligned} +2\xi \frac{dZ}{d\xi} &= +2z_1\xi + 4z_2\xi^2 + 6z_3\xi^3 + 8z_4\xi^4 + 10z_5\xi^5 + \dots \\ -2\xi^2 \frac{dZ}{d\xi} &= -2z_1\xi^2 - 4z_2\xi^3 - 6z_3\xi^4 - 8z_4\xi^5 + \dots \\ +6Z\xi &= +6z_0\xi + 6z_1\xi^2 + 6z_2\xi^3 + 6z_3\xi^4 + 6z_4\xi^5 + \dots \\ -3Z &= -3z_0 - 3z_1\xi - 3z_2\xi^2 - 3z_3\xi^3 - 3z_4\xi^4 - 3z_5\xi^5 + \dots \\ +4Z^2 &= +4z_0^2 + 8z_0z_1\xi + 4(2z_0z_2 + z_1^2)\xi^2 + 4(2z_0z_3 + 2z_1z_2)\xi^3 + 4(2z_0z_4 + 2z_1z_3 + z_2^2)\xi^4 + 4(2z_0z_5 + 2z_1z_4 + 2z_2z_3)\xi^5 + \dots = 0 \end{aligned}$$

De eerste 3 termen van $Z(\xi) = \frac{1}{X(\xi)}$ worden handmatig berekend aan de hand van bovenvermelde gegevens:

$$\begin{array}{llll}
 -3z_0 + 4y_0 = -3z_0 + 4z_0^2 & = -3z_0 + 4z_0^2 = 0 & \rightarrow & z_0 = \frac{3}{4} \text{ (substitueer: } 8z_0 = 6) \\
 +6z_0 - 1z_1 + 4y_1 = +6z_0 - 1z_1 + 8z_0z_1 & = +6z_0 + 5z_1 = 0 & \rightarrow & z_1 = \frac{2}{5}(-3z_0) = -\frac{9}{10} \\
 +4z_1 + 1z_2 + 4y_2 = +4z_1 + 1z_2 + 8z_0z_2 + 4z_1^2 & = +4z_1 + 7z_2 + 4z_1^2 = 0 & \rightarrow & z_2 = \frac{2}{7}(-2z_1 - 2z_1^2) = \frac{9}{175} \\
 +2z_2 + 3z_3 + 4y_3 = +2z_2 + 3z_3 + 8z_0z_3 + 8z_1z_2 & = +2z_2 + 9z_3 + 8z_1z_2 = 0 & \rightarrow & z_3 = \frac{2}{9}(-1z_2 - 4z_1z_2) \\
 0z_3 + 5z_4 + 4y_4 = 0z_3 + 5z_4 + 8z_0z_4 + 8z_1z_3 + 4z_2^2 & = 0z_3 + 11z_4 + 8z_1z_3 + 4z_2^2 = 0 & \rightarrow & z_4 = \frac{2}{11}(0z_3 - 4z_1z_3 - 2z_2^2) \\
 -2z_4 + 7z_5 + 4y_5 = -2z_4 + 7z_5 + 8z_0z_5 + 8z_1z_4 + 8z_2z_3 & = -2z_4 + 13z_5 + 8(z_1z_4 + z_2z_3) = 0 & \rightarrow & z_5 = \frac{2}{13}(+1z_4 - 4z_1z_4 - 4z_2z_3) \\
 -4z_5 + 9z_6 + 4y_6 = -4z_5 + 9z_6 + 8z_0z_6 + 8z_1z_5 + 8z_2z_4 + 2z_3^2 & = -4z_5 + 15z_6 + 8(z_1z_5 + z_2z_4) + 4z_3^2 = 0 & & \text{etcetera}
 \end{array}$$

Bij $n \geq 3$ geldt:

$$\text{voor oneven } n: \quad z_n = \frac{2}{2n+3} \left[(n-4) \cdot z_{n-1} - 4 \sum_{i=1}^{(n-1)/2} z_i \cdot z_{n-i} \right] \quad \text{voor even } n: \quad z_n = \frac{2}{2n+3} \left[(n-4) \cdot z_{n-1} - 2z_{n/2}^2 - 4 \sum_{i=1}^{n/2-1} z_i \cdot z_{n-i} \right]$$

Uitwerking van de boven gegeven formules voor de polynomen van $Z(\xi) = \frac{1}{X(\xi)}$ en van $v(\xi)$ voor de eerste 14 termen:

$$\frac{1}{X(\xi)} = z_0 + z_1\xi + z_2\xi^2 + z_3\xi^3 + z_4\xi^4 + z_5\xi^5 + \dots$$

$$v(\xi) = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 + c_4\xi^4 + c_5\xi^5 + \dots$$

z_0	$\frac{3}{4}$
z_1	$-\frac{9}{10}$
z_2	$\frac{9}{175}$
z_3	$\frac{26}{875}$
z_4	$\frac{6228}{336875}$
z_5	$\frac{265896}{21896875}$
z_6	$\frac{19139024}{2299171875}$
z_7	$\frac{385073504}{65143203125}$
z_8	$\frac{2060869592128}{476522530859375}$
z_9	$\frac{9945695595904}{3063359126953125}$
z_{10}	$\frac{186453795500433152}{74802124281650390625}$
z_{11}	$\frac{3492931512980992}{1789524504345703125}$
z_{12}	$\frac{87638492237288707072}{56345513181721435546875}$
z_{13}	$\frac{26283191098024392546304}{20879142940115665283203125}$

c_0	0
c_1	0
c_2	$\frac{2}{35}$
c_3	$\frac{52}{1575}$
c_4	$\frac{1384}{67375}$
c_5	$\frac{59088}{4379375}$
c_6	$\frac{38278048}{4138509375}$
c_7	$\frac{770147008}{117257765625}$
c_8	$\frac{4121739184256}{857740555546875}$
c_9	$\frac{19891391191808}{5514046428515625}$
c_{10}	$\frac{372907591000866304}{134643823706970703125}$
c_{11}	$\frac{6985863025961984}{3221144107822265625}$
c_{12}	$\frac{175276984474577414144}{101421923727098583984375}$
c_{13}	$\frac{52566382196048785092608}{37582457292208197509765625}$

Bij gegeven $z_0 = \frac{3}{4}$, $z_1 = -\frac{6}{5}z_0$ en $z_2 = -\frac{4}{7}z_1(1+z_1)$ zijn de coëfficiënten van $\frac{1}{X(\xi)}$ als volgt te genereren:

bij oneven $n \geq 3$:
$$z_n = \frac{2}{2n+3} \left[(n-4) \cdot z_{n-1} - 4 \sum_{i=1}^{(n-1)/2} z_i \cdot z_{n-i} \right]$$

bij even $n \geq 4$:
$$z_n = \frac{2}{2n+3} \left[(n-4) \cdot z_{n-1} - 2z_{n/2}^2 - 4 \sum_{i=1}^{n/2-1} z_i \cdot z_{n-i} \right]$$

Het verband tussen de coëfficiënten c_n en z_n is als volgt:

$$c_0 = \frac{10}{9}z_0 - \frac{5}{6} = 0 \quad c_1 = \frac{10}{9} \cdot z_1 + 1 = 0$$

voor $n \geq 2$:
$$c_n = \frac{10}{9} \cdot z_n$$

Appendix H (zie limiet X voor $\xi \rightarrow 0$)

Hier geldt de [regel van l'Hôpital](#): als 2 differentieerbare functies $f(x)$ en $g(x)$ voldoen aan de voorwaarde $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$,

dan geldt voor het quotiënt van deze functies in relatie tot de eerste afgeleiden: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Voor het te bewijzen geval: $\lim_{\xi \rightarrow 0} X(\xi) = \lim_{g \rightarrow 0} \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} = \lim_{g \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2g}{3 \sin^2 g \cos g} = \lim_{g \rightarrow 0} \frac{2 - 2(1 - 2 \sin^2 g)}{3 \sin^2 g \cos g} = \lim_{g \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 g}{3 \sin^2 g \cos g} = \lim_{g \rightarrow 0} \frac{4}{3 \cos g} = \frac{4}{3}$

Appendix I (zie functies η_a en η_b)

Een ellips is een concave, gesloten curve, waarvan de oppervlakteverhouding van sector en driehoek η altijd groter dan 1 is.

Dit volgt onmiddellijk uit (65), (68), (73) en (81) met: $\eta = 1 + X(\xi)(\lambda + \xi)$ met $\lambda > 0$, $\xi > 0$, $X(\xi) > \frac{4}{3}$, $\eta > 1$.

Gegeven: $\eta_a(\xi) = 1 + X(\xi)(\lambda + \xi) \rightarrow \eta_a(0) = 1 + X(0) \cdot \lambda = 1 + \frac{4}{3} \lambda$ en $\eta_b(\xi) = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + \xi}} \rightarrow \eta_b(0) = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$

Te bewijzen: $\eta_b(0) > \eta_a(0)$

Bewijs: Als $\eta_b(0) > \eta_a(0)$, dan is $\eta_b^2(0) > \eta_a^2(0)$ en zal moeten gelden: $\frac{\mu}{\lambda} > (1 + \frac{4}{3} \lambda)^2 \rightarrow \mu > \lambda \cdot (1 + \frac{4}{3} \lambda)^2$

Stel dat (ξ_0, η_0) de oplossing is van de vergelijking $\eta_a(\xi) = \eta_b(\xi)$, waarbij η_0 de gezochte oppervlakteverhouding is.

Dan geldt volgens (68) en (69): $\eta_0^2 = \frac{\mu}{\lambda + \xi_0}$ en $\eta_0 = 1 + X(\xi_0)(\lambda + \xi_0) \rightarrow \mu = \frac{(\eta_0 - 1) \cdot \eta_0^2}{X(\xi_0)}$ en $\lambda = \frac{\eta_0 - 1}{X(\xi_0)} - \xi_0$

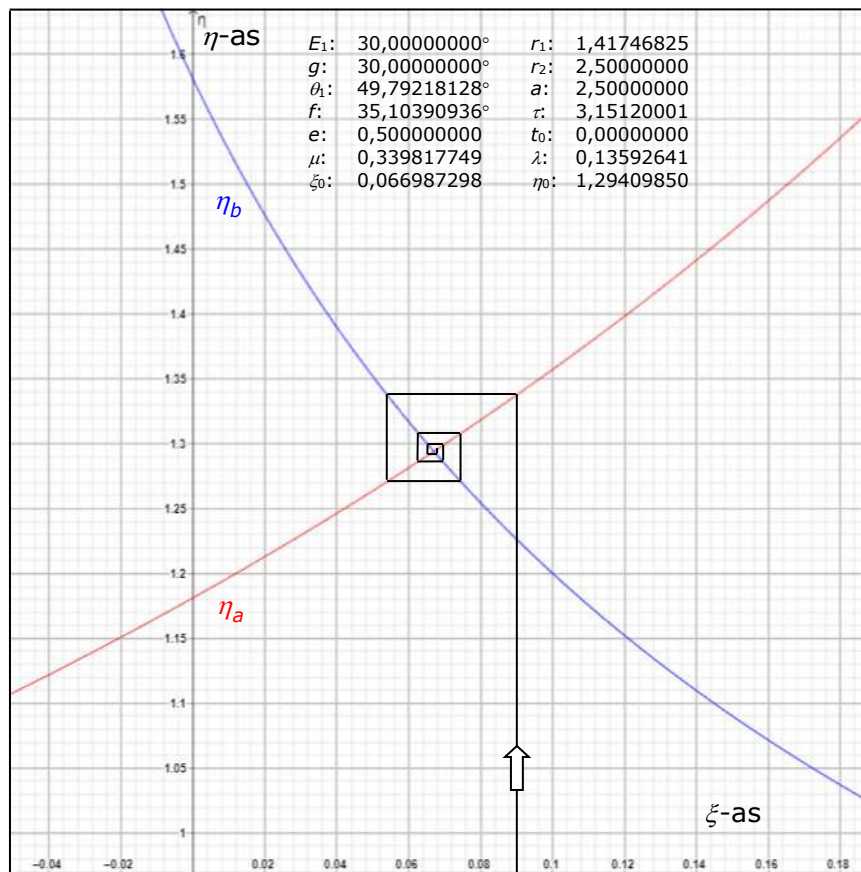
Dus te bewijzen: $\frac{\eta_0 - 1}{X(\xi_0)} \cdot \eta_0^2 > (\frac{\eta_0 - 1}{X(\xi_0)} - \xi_0) \cdot (1 + \frac{4}{3} (\frac{\eta_0 - 1}{X(\xi_0)} - \xi_0))^2$ Onmiddellijk is in te zien dat: $\frac{\eta_0 - 1}{X(\xi_0)} > \frac{\eta_0 - 1}{X(\xi_0)} - \xi_0$,

zodat nog te bewijzen is: $\eta_0 > 1 + \frac{4}{3} (\frac{\eta_0 - 1}{X(\xi_0)} - \xi_0)$ Stel daarbij: $\alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{X(\xi_0)}$ met $0 < \alpha < 1$, want $X(\xi_0) > \frac{4}{3}$

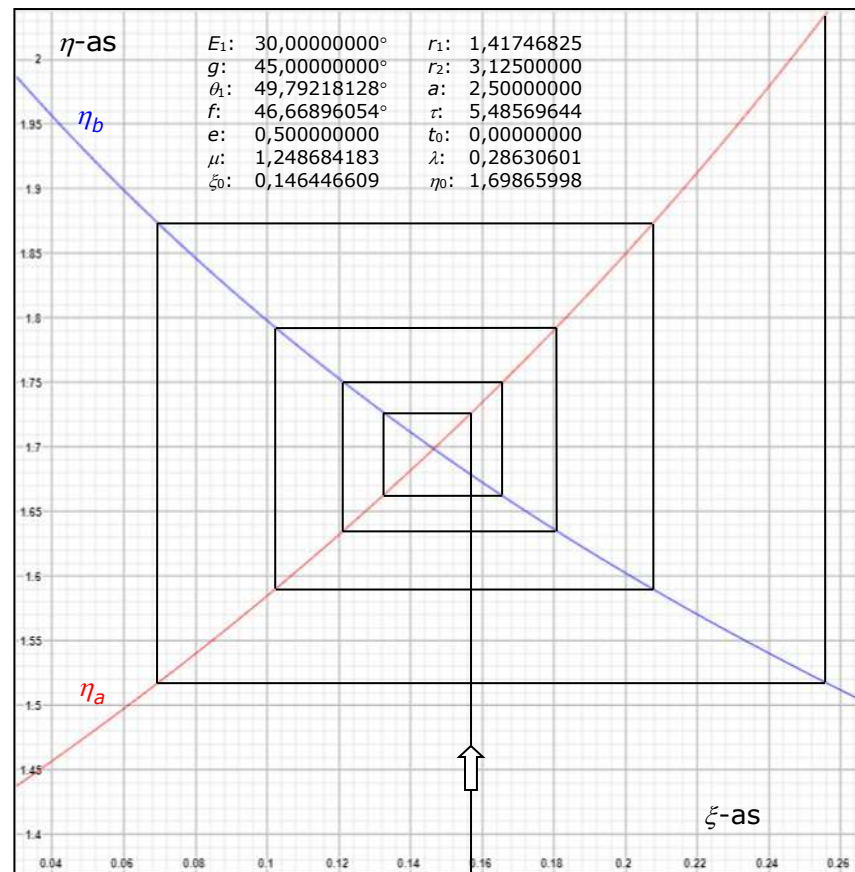
$\eta_0 > 1 + \alpha \eta_0 - \alpha - \frac{4}{3} \xi_0 \rightarrow \eta_0 (1 - \alpha) > 1 - \alpha - \frac{4}{3} \xi_0 \rightarrow \eta_0 > 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\xi_0}{1 - \alpha}$ maar $1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\xi_0}{1 - \alpha} < 1$ q.e.d.

Voor alle oplossingen (ξ_0, η_0) met $0 < \xi_0 < \frac{1}{2}$ en $1 < \eta_0 < \infty$ geldt dus: $\eta_b(0) > \eta_a(0)$.

Appendix J (zie divergentie bij iteratie)



De iteratie is gestart met $\xi = \sin^2\left(\frac{1}{2}f\right) = 0,0909$.
Er is redelijk goede convergentie.



De iteratie is gestart met $\xi = \sin^2\left(\frac{1}{2}f\right) = 0,1569$.
Er is sprake van divergentie.

Appendix K (zie grensgeval ellips)

De **parabool** is het grensgeval van de ellips, waarbij de excentriciteit $e = 1$. De baanvergelijking van de parabool is dus: $r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$

Volgens (10) geldt echter ook $a = \frac{p}{1 - e^2}$, zodat de halve lange as a hier geen reële betekenis meer heeft, immers $\lim_{e \rightarrow 1} a = \lim_{e \rightarrow 1} \frac{p}{1 - e^2} = \infty$.

Meestal wordt bij parabolische banen de periheliumafstand q als parameter gebruikt. Bij $\theta = 0$ geldt namelijk: $q = \frac{p}{1 + \cos 0} = \frac{p}{2}$.

Om geen nieuw symbool te hoeven introduceren, zal hier echter gebruik blijven worden gemaakt van de parameter p .

Voor een parabool wordt de factor g als verschil van 2 excentrische anomalieën gelijk aan 0. Daarmee is ook $\xi = \sin^2 \frac{1}{2} g = 0$.

Dit wordt duidelijk door vergelijking (59) te kwadrateren: $r_1 r_2 \sin^2 f = ap \sin^2 g = \frac{p^2}{1 - e^2} \sin^2 g = \frac{2p^2}{1 - e^2} \sin^2 \frac{1}{2} g \cos^2 \frac{1}{2} g = \frac{2p^2}{1 - e^2} \cdot \xi(1 - \xi)$

Hieruit volgt: $\xi(1 - \xi) = \frac{1 - e^2}{2p^2} \cdot r_1 r_2 \sin^2 f$, zodat $\lim_{e \rightarrow 1} \xi(1 - \xi) = \lim_{e \rightarrow 1} \frac{1 - e^2}{2p^2} \cdot r_1 r_2 \sin^2 f = 0 \rightarrow \xi(1 - \xi) = 0$ dus $\xi = 0$

Volgens (70), (74) en (75) geldt dan: $X(\xi = 0) = \frac{4}{3}$ en $\eta = 1 + \frac{4}{3} \lambda = 1 + \frac{4}{3} \left(\frac{r_1 + r_2}{2\kappa} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cdot \frac{r_1 + r_2}{\kappa} \right)$

Hierbij is voor de parameter κ bij (93) afgeleid: $\kappa = 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f = \sqrt{2(r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2)}$

De oppervlakteverhouding sector/driehoek η kan ook direct worden afgeleid uit de genoemde vergelijking van de parabool (zie figuur 8).

De 'omweg' via de excentrische anomalie is hierbij niet nodig en de sectoroppervlakte kan direct worden uitgedrukt in de ware anomalie:

$$A_{\text{sector}} = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{p}{1 + \cos \theta} \right)^2 d\theta = \frac{p^2}{8} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos^4 \frac{1}{2} \theta} = \frac{p^2}{4} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d(\frac{1}{2} \theta)}{\cos^4 \frac{1}{2} \theta} = \frac{p^2}{4} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d(\tan \frac{1}{2} \theta)}{\cos^2 \frac{1}{2} \theta} = \frac{p^2}{4} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (1 + \tan^2 \frac{1}{2} \theta) d(\tan \frac{1}{2} \theta)$$

$$A_{\text{sector}} = \frac{p^2}{4} \left(\tan \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{1}{2} \theta \right) \Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{p^2}{12} \left[3 \left(\tan \frac{1}{2} \theta_2 - \tan \frac{1}{2} \theta_1 \right) + \left(\tan^3 \frac{1}{2} \theta_2 - \tan^3 \frac{1}{2} \theta_1 \right) \right]$$

$$A_{\text{driehoek}} = \frac{1}{2} \cdot \text{basis} \cdot \text{hoogte} = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin 2f = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_2) \quad \text{Zie ook afleiding formule (57).}$$

De grote wiskundige **Archimedes** (287-212 v.Chr.) wist al de **oppervlakte van een parabolosegment** te bepalen. Hij gebruikte daarvoor de zg. **uitputtingsmethode**, een voorloper van de integraalrekening. Ter bepaling van η zal worden overgegaan op rechthoekige coördinaten.

Volgens (5) geldt immers: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ en $r^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = x^2 + y^2$.

Uit de baanvergelijking volgt: $p = r + r \cos \theta = r + x$, zodat de vergelijking van de parabool luidt:

$$y^2 = r^2 - x^2 = (p - x)^2 - x^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = p^2 - 2px$$

$$\text{Bovendien geldt: } \tan \frac{1}{2} \theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{r \sin \theta}{r + r \cos \theta} = \frac{y}{p}$$

Toepassing van de vorige relatie op de via integraalrekening verkregen sectoroppervlakte geeft dan:

$$A_{\text{sector}} = \frac{p^2}{12} \left[3 \left(\tan \frac{1}{2} \theta_2 - \tan \frac{1}{2} \theta_1 \right) + \left(\tan^3 \frac{1}{2} \theta_2 - \tan^3 \frac{1}{2} \theta_1 \right) \right] = \frac{p^2}{12} \left[3 \cdot \frac{y_2 - y_1}{p} + \frac{y_2^3 - y_1^3}{p^3} \right] =$$

$$A_{\text{sector}} = \frac{p^2}{12} \left[3 \cdot \frac{y_2 - y_1}{p} + \frac{(y_2 - y_1)(y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2)}{p^3} \right] = \frac{y_2 - y_1}{12p} (3p^2 + y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2)$$

Bovendien geldt voor de oppervlakte van de driehoek:

$$A_{\text{driehoek}} = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin 2f = \frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_2) = \frac{1}{2} (r_2 \sin \theta_2 \cdot r_1 \cos \theta_1 - r_1 \sin \theta_1 \cdot r_2 \cos \theta_2) = \frac{1}{2} (y_2 x_1 - y_1 x_2)$$

Door x uit te drukken in y middels de baanvergelijking met $x = \frac{p^2 - y^2}{2p}$ kan x geëlimineerd worden, zodat:

$$A_{\text{driehoek}} = \frac{1}{2} (y_2 x_1 - y_1 x_2) = \frac{1}{2} \left(y_2 \frac{p^2 - y_1^2}{2p} - y_1 \frac{p^2 - y_2^2}{2p} \right) = \frac{1}{4p} (p^2 y_2 - y_1^2 y_2 - p^2 y_1 + y_2^2 y_1) = \frac{1}{4p} (y_2 - y_1)(y_1 y_2 + p^2)$$

Zo is dus de oppervlakteverhouding sector/driehoek voor de parabool te schrijven als:

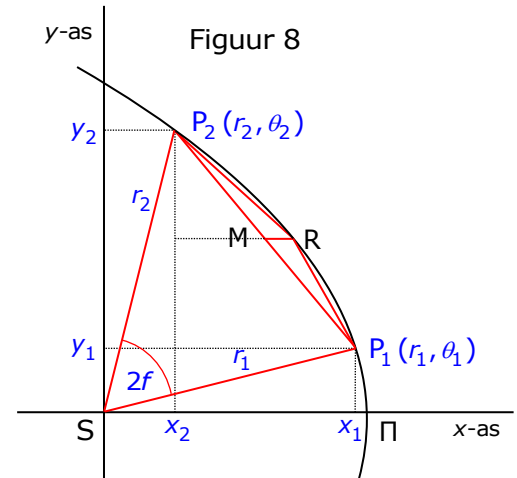
$$\eta = \frac{A_{\text{sector}}}{A_{\text{driehoek}}} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{12p} (3p^2 + y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2)}{\frac{1}{4p} (y_2 - y_1)(y_1 y_2 + p^2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3p^2 + 3y_1 y_2 + y_2^2 - 2y_1 y_2 + y_1^2}{y_1 y_2 + p^2} = \frac{1}{3} \cdot \left(3 + \frac{y_2^2 - 2y_1 y_2 + y_1^2}{y_1 y_2 + p^2} \right) = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{(y_2 - y_1)^2}{y_1 y_2 + p^2}$$

Aangezien $A_{\text{segment}} = A_{\text{sector}} - A_{\text{driehoek}}$ geldt voor het paraboolsegment $P_1 P_2 R$:

$$A_{\text{segment}} = \frac{y_2 - y_1}{12p} (3p^2 + y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2) - \frac{1}{4p} (y_2 - y_1)(y_1 y_2 + p^2) = \frac{y_2 - y_1}{12p} (3p^2 + y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2 - 3y_1 y_2 - 3p^2) = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p}$$

Archimedes liet de parabool snijden door de koorde $P_1 P_2$, nam het midden M van de koorde en halveerde met het horizontale lijnstuk MR zowel het paraboolsegment $P_1 P_2 R$ als de driehoek $P_1 P_2 R$. Vervolgens bewees hij dat de oppervlakten van beide zich verhouden als 4:3.

$$\text{Ergo: } A_{\text{segment}} = \frac{4}{3} \cdot A_{\Delta P_1 P_2 R} = \frac{4}{3} \cdot (A_{\Delta P_1 M R} + A_{\Delta P_2 M R}) = \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \text{basis} \cdot \text{hoogte} \right) = \frac{4}{3} \cdot MR \cdot \frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{2}{3} \cdot MR \cdot (y_2 - y_1)$$



Hieruit volgt dus: $A_{\text{segment}} = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p} = \frac{2}{3} \cdot \text{MR} \cdot (y_2 - y_1) \rightarrow \text{MR} = \frac{(y_2 - y_1)^2}{8p}$

Dit kan worden geïverifieerd door middel van de x -coördinaten van de punten M (het midden van koorde P_1P_2) en R op de parabool:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p^2 - y_1^2}{4p} + \frac{p^2 - y_2^2}{4p} = \frac{2p^2 - y_1^2 - y_2^2}{4p} \quad \text{en} \quad x_R = \frac{p^2 - y_R^2}{2p} = \frac{p^2 - y_M^2}{2p} = \frac{p^2 - \frac{1}{4}(y_1 + y_2)^2}{2p} = \frac{4p^2 - (y_1 + y_2)^2}{8p}$$

$$x_R - x_M = \frac{4p^2 - (y_1 + y_2)^2}{8p} - \frac{2p^2 - y_1^2 - y_2^2}{4p} = \frac{4p^2 - y_1^2 - 2y_1y_2 - y_2^2 - 4p^2 + 2y_1^2 + 2y_2^2}{8p} = \frac{y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2}{8p} = \frac{(y_2 - y_1)^2}{8p} = \text{MR}$$

Het punt R vormt het raakpunt van de raaklijn aan de parabool, evenwijdig aan de koorde P_1P_2 . Dit volgt direct uit de baanvergelijking:

$$2y_R dy = -2p dx \rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_R = -\frac{p}{y_R} = -\frac{2p}{y_2 + y_1} = -\frac{2p}{y_2 + y_1} \cdot \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{-2p(y_2 - y_1)}{y_2^2 - y_1^2} = \frac{-2p(y_2 - y_1)}{p^2 - 2px_2 - p^2 + 2px_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_M$$

Tot dusver zijn er 2 vergelijkingen afgeleid voor de oppervlakteverhouding sector/driehoek bij de parabool:

- Via de theorie van Gauss als grensgeval van de ellips met excentriciteit $e = 1$: $\eta = 1 + \frac{4}{3}\lambda = \frac{1}{3}(1 + 2 \cdot \frac{r_1 + r_2}{\kappa})$
- Via integreren van de baanvergelijking en de geometrie van de parabool: $\eta = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{(y_2 - y_1)^2}{y_1y_2 + p^2}$

Volgens (93) en (94) geldt ook: $\kappa^2 = 4r_1r_2 \cos^2 f = 2(r_1r_2 + x_1x_2 + y_1y_2)$ en $\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2\kappa} - \frac{1}{2}$

Dat de twee hierboven gegeven uitdrukkingen voor η equivalent zijn, zal nu worden aangetoond.

Daarbij wordt gebruik gemaakt van het verband: $\kappa = \frac{y_1y_2}{p} + p$

Bewijs: $\kappa^2 = \left(\frac{y_1y_2}{p} + p\right)^2 = \frac{y_1^2}{p} \cdot \frac{y_2^2}{p} + 2y_1y_2 + p^2$ Volgens de baanvergelijking: $p = r + x$ en $\frac{y^2}{p} = p - 2x = (r + x) - 2x = r - x$

Substitutie van $\frac{y_1^2}{p} = r_1 - x_1$, $\frac{y_2^2}{p} = r_2 - x_2$ en $p = r_1 + x_1 = r_2 + x_2$ geeft dan:

$$\kappa^2 = \frac{y_1^2}{p} \cdot \frac{y_2^2}{p} + 2y_1y_2 + p^2 = (r_1 - x_1)(r_2 - x_2) + 2y_1y_2 + (r_1 + x_1)(r_2 + x_2) = 2r_1r_2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2 \quad \text{q.e.d.}$$

Tenslotte zal λ via de baanvergelijking worden uitgedrukt in y_1 , y_2 en p :

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2\kappa} - \frac{1}{2} = \frac{p - x_1 + p - x_2}{2\left(\frac{y_1 y_2}{p} + p\right)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2 - 2px_1 + p^2 - 2px_2 + 2p^2}{2y_1 y_2 + 2p^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{y_1^2 + y_2^2 + 2p^2}{2y_1 y_2 + 2p^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{y_1^2 + y_2^2 + 2p^2 - 2y_1 y_2 - 2p^2}{2y_1 y_2 + 2p^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_1^2 - 2y_1 y_2 + y_2^2}{2y_1 y_2 + 2p^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(y_1 - y_2)^2}{y_1 y_2 + p^2}$$

Hiermee is bewezen, dat voor de oppervlakteverhouding sector/driehoek η bij de parabool geldt:

$$\eta = 1 + \frac{4}{3}\lambda = 1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{(y_1 - y_2)^2}{y_1 y_2 + p^2} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{(y_2 - y_1)^2}{y_1 y_2 + p^2} \quad \text{en} \quad \eta = 1 + \frac{4}{3}\lambda = 1 + \frac{4}{3} \left(\frac{r_1 + r_2}{2\kappa} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cdot \frac{r_1 + r_2}{\kappa} \right)$$

Appendix L ([zie berekening excentrische anomalie](#))

De methode van Newton berust op de benadering van een functie in de omgeving van het nulpunt met behulp van een Taylor-reeks:

$$f(x) = f(a) + \frac{df(a)}{dx}(x-a) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2f(a)}{dx^2}(x-a)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3f(a)}{dx^3}(x-a)^3 + \dots = 0$$

Hierbij is a een schatting van de te berekenen x -waarde waarvoor $f(x) = 0$.

Als alleen de eerste afgeleide wordt benut en $x - a$ wordt vervangen door $x_n - x_{n-1}$, dan geldt bij iteratieve benaderingen:

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + \frac{df(x_{n-1})}{dx}(x_n - x_{n-1}) = 0 \quad \rightarrow \quad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad \text{waarbij} \quad \frac{df(x_{n-1})}{dx} \text{ is genoteerd als } f'(x_{n-1}).$$

De hierboven afgeleide formule is de wiskundige formulering van Newton's methode.

In dit specifieke geval is de te benaderen waarde de excentrische anomalie E , op te lossen uit (32): $f(E) = E - e \sin E - M = 0$.

De variabele x wordt hierbij vervangen door de variabele E , zodat de formulering als volgt luidt: $E_n = E_{n-1} - \frac{f(E_{n-1})}{f'(E_{n-1})}$

In de laatste vergelijking geldt dan: $f(E_{n-1}) = E_{n-1} - e \sin E_{n-1} - M = 0$ en voor de eerste afgeleide: $f'(E_{n-1}) = 1 - e \cos E_{n-1}$.

Invullen van deze uitdrukkingen geeft de op pagina 9 vermelde formule: $E_n = E_{n-1} + \frac{M + e \sin E_{n-1} - E_{n-1}}{1 - e \cos E_{n-1}}$