

## Inleiding

In het jaar 1747 trad [Johann Sebastian Bach](#) (1685-1750) toe tot de [Correspondierende Societät der musicalischen Wissenschaften](#), een in het jaar 1738 door [Lorenz Christoph Mizler](#) (1711-1778) te Leipzig geformeerd muziekwetenschappelijk gezelschap.

Mizler was een Duitse filosoof, medicus, wiskundige, musicus, componist, en uitgever. De doelstelling van het gezelschap kan het beste worden weergegeven door de titelpagina van de [Musicalische Bibliothek](#), het publikatieorgaan van de Societät. Deze luidt:

"Musikalische Bibliothek, oder Gründliche Nachricht nebst unpartheyischem Urtheil von alten und neuen musikalischen Schriften und Büchern worinnen alles, was aus der Mathematik, Philosophie, und den schönen Wissenschaften, zur Verbesserung und Erläuterung sowohl der theoretischen als practischen Musik gehöret, nach und nach beygebracht wird."

Bach trad toe als 14<sup>e</sup> lid van dit selecte gezelschap, dat op dat moment bestond uit de volgende personen:

nr.	jaar	lid Societät	nr.	jaar	lid Societät	nr.	jaar	lid Societät
1	1738	Giacomo de Lucchesini (16?? -1739)	6	1739	Georg Philipp Telemann (1681-1767)	11	1743	Udalricus Weiß (1713-1763)
2	1738	Lorenz Christoph Mizler (1711-1778)	7	1739	Gottfried Heinrich Stölzel (1690-1749)	12	1745	Georg Friedrich Händel (1685-1759)
3	1738	Georg Heinrich Bümler (1669-1745)	8	1742	Georg Friedrich Lingke (1697-1777)	13	1746	Carl Heinrich Graun (1703-1759)
4	1739	Christoph Gottlieb Schröter (1699-1745)	9	1743	Meinrad Spieß (1683-1761)	14	1747	Johann Sebastian Bach (1685-1750)
5	1739	Heinrich Bokemeyer (1679-1751)	10	1743	Georg Venzky (1704-1757)			

Bij zijn toetreding tot de Societät schonk Bach als proeve van bekwaamheid [de orgelcompositie](#) "Einige canonische Veränderungen über das Weynacht-Lied: Vom Himmel hoch da komm' ich her" (BWV 769) en de "Canon triplex a 6 voci" (BWV 1076).

Bovendien werd bij deze gelegenheid [zijn portret](#) geschilderd door [Elias Gottlob Haußmann](#) (1695-1774), het enige portret waarvan de authenticiteit met zekerheid is vastgesteld.

[De compositie BWV 769](#) bestaat uit 5 variaties voor orgel met 2 manualen en pedaal, gebaseerd op de koraalmelodie "Vom Himmel hoch da komm' ich her", waarin de omspelende stemmen en/of de koraalmelodie zelf op de volgende wijze als canon worden behandeld:

Variatio 1: in Canone all' Ottava      Variatio 2: Alio modo in Canone alla Quinta      Variatio 3: Canone alla Settima, cantabile

Variatio 4: per augmentation in Canone all' Ottava

Variatio 5: L'altra Sorte del' Canone all' rovercio: 1) alla Sesta 2) alla Terza 3) alla Seconda è 4) alla Nona

Het aantal maten (in het vervolg maatgetallen genoemd) van de 5 variaties bedraagt respectievelijk:

Variatio 1	18	Variatio 2	23	Variatio 3	27	Variatio 4	42	Variatio 5	56
------------	----	------------	----	------------	----	------------	----	------------	----

Het totaal aantal maten van alle 5 variaties samen bedraagt 166.

Opmerkelijk is, dat de eerste en tweede variatie uit resp. 18 en 23 maten bestaan. Hierin zijn de cijfers 2, 1, 3 en 8 te herkennen, die symbool staan voor de letters B, A, C en H, zoals gecodeerd middels de onderstaande tabel van het Latijnse alfabet.

letter	getalsymbool	letter(s)	getalsymbool	letter	getalsymbool	letter(s)	getalsymbool
A	1	G	7	N	13	T	19
B	2	H	8	O	14	U, V	20
C	3	I, J	9	P	15	W	21
D	4	K	10	Q	16	X	22
E	5	L	11	R	17	Y	23
F	6	M	12	S	18	Z	24

Bovendien is de som van de maatgetallen van de eerste twee variaties gelijk aan  $18 + 23 = 41$ , het getalsymbool voor J.S. Bach.

Bij nadere beschouwing van de getallen, die tevoorschijn komen als som van de maatgetallen van 2 of 3 verschillende variaties, blijkt dat deze overeenkomen met getalsymbolen van 10 leden van de Societät, mits deze symbolen worden afgeleid van de achternaam en voorletters van de participanten.

De combinatie van 2 of 3 verschillende maatgetallen leidt in Bach's compositie tot de volgende 20 somgetallen (gesorteerd volgens grootte):

combinatie	somgetal	combinatie	somgetal	combinatie	somgetal	combinatie	somgetal	combinatie	somgetal
18 + 23	41	23 + 42	65	23 + 56	79	23 + 27 + 42	92	23 + 27 + 56	106
18 + 27	45	18 + 23 + 27	68	27 + 56	83	18 + 23 + 56	97	18 + 42 + 56	116
23 + 47	50	27 + 42	69	18 + 23 + 42	83	42 + 56	98	23 + 42 + 56	121
18 + 42	60	18 + 56	74	18 + 27 + 42	87	18 + 27 + 56	101	27 + 42 + 56	125

Twee verschillende combinaties van maatgetallen geven hetzelfde somgetal 83, maar de overige 18 somgetallen zijn alle verschillend.

## De getalsymboliek

Zoals vermeld zijn vele van de genoemde somgetallen terug te voeren op getalsymbolen van leden van de Societät, en wel als volgt:

naam en voorletter(s)	getalsymbool	gebruikte variaties	gesommeerde maatgetallen
G. LUCCHESINI	106	Variatio 2, 3 en 5	$23 + 27 + 56$
L.C. MIZLER	92	Variatio 2, 3 en 4	$23 + 27 + 42$
G.H. BUEMLER	87	Variatio 1, 3 en 4	$18 + 27 + 42$
C.G. SCHROETER	116	Variatio 1, 4 en 5	$18 + 42 + 56$
H. BOKEMEYER	101	Variatio 1, 3 en 5	$18 + 27 + 56$
G.P. TELEMANN	101	Variatio 1, 3 en 5	$18 + 27 + 56$
G.F. LINGKE	68	Variatio 1, 2 en 3	$18 + 23 + 27$
G.F. HAENDEL	60	Variatio 1 en 4	$18 + 42$
C.H. GRAUN	69	Variatio 3 en 4	$27 + 42$
J.S. BACH	41	Variatio 1 en 2	$18 + 23$

tabel 1

Hierbij dient te worden opgemerkt, dat de letters ü, ö en ä in drie van de namen zijn vervangen door resp. ue, oe en ae. Bovendien is het voorvoegsel 'de' bij de naam G. Lucchesini weggelaten (in overeenstemming met de overige achternamen, die uit één deel bestaan).

De namen H. Bokemeyer en G.P. Telemann geven hetzelfde getalsymbool 101.

De getalsymbolen van de overige vier namen (waarbij bovendien de letter ß is vervangen door ss) zijn eveneens terug te voeren tot een som van maatgetallen, maar dat kan alleen op een veel gekunstelder wijze, waarbij meer dan 3 maatgetallen betrokken zijn en/of dezelfde maatgetallen meerdere keren worden gebruikt. Volledigheidshalve zijn deze in de onderstaande tabel 2 vermeld.

naam en voorletter(s)	getalsymbool	gebruikte variaties	gesommeerde maatgetallen
G.H. STOELZEL	122	Variatio 1, 2, 3, 3 en 3	$18 + 23 + 27 + 27 + 27$
M. SPIESS	95	Variatio 1, 2, 3 en 3	$18 + 23 + 27 + 27$
G. VENZKY	102	Variatio 2, 2 en 5	$23 + 23 + 56$
U. WEISS	91	Variatio 1, 2, 2 en 3	$18 + 23 + 23 + 27$

tabel 2

Het is de vraag of Bach het aantal maten van de variaties zodanig heeft gekozen, dat de getalsymbolen van de 10 leden van de Societät op een eenvoudige manier als som van deze aantallen te vormen zijn. En ook in hoeverre het opdoemen van deze symbolen op toeval berust.

Deze vraag kan alleen beantwoord worden met behulp van een statistische analyse. Daarbij zullen slechts getalsymbolen in beschouwing worden genomen, die ontstaan als de som van 2 of 3 verschillende maatgetallen, welke zullen worden vergeleken met de genoemde getalsymbolen van de 14 leden van de Societät.

### Statistische analyse

Bij de analyse zullen de volgende uitgangspunten worden toegepast:

- Voor iedere variatie wordt een minimum van 14 maten en een maximum van 64 maten genomen. Deze keuze is arbitrair. Bach heeft bij het componeren van de 5 variaties het aantal maten van iedere variatie immers binnen zekere grenzen vrij kunnen kiezen.
- Bij ieder van de 5 muziekstukken wordt het aantal maten tussen de genoemde grenzen gevarieerd, waarbij wordt toegestaan, dat twee of meer stukken hetzelfde aantal maten hebben. Dit leidt tot een groot aantal combinaties van 5 maatgetallen, van nu af aan gepresenteerd in de vorm  $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$ , waarbij de maatgetallen  $m_i$  voldoen aan de voorwaarde  $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq m_4 \leq m_5$ . De volgorde van de 5 maatgetallen bij deze analyse is overigens niet relevant, zolang iedere combinatie maar uniek is. Bach's keuze bijvoorbeeld wordt voorgesteld door de combinatie (18, 23, 27, 42, 56).
- Alle mogelijke combinaties van maatgetallen worden onderzocht op de getalsymbolen van de 14 leden van de Societät, waarbij slechts de som van 2 of 3 verschillende maatgetallen in beschouwing wordt genomen (met 20 mogelijke uitkomsten per combinatie). Het getalsymbool 101 geldt voor de beide personen G.P. Telemann en H. Bokemeyer, en wordt daarom bij detectie 2 maal geteld. Voorbeelden van enkele willekeurige combinaties zijn (16, 16, 16, 16, 16), (64, 64, 64, 64, 64) en (37, 38, 39, 40, 41).
- Bij de analyse worden de volgende vier gevallen onderscheiden:
  - geval 1: Alle 2.869.685 mogelijke combinaties van maatgetallen worden onderzocht zonder verdere restricties.
  - geval 2: De totale som van de 5 maatgetallen wordt beperkt tot minimaal 152 en maximaal 180 maten (Bach gebruikt 166 maten). Deze arbitraire begrenzing dient ter reductie van een aantal minder waarschijnlijke uitkomsten, die nogal afwijkend zijn van Bach's overgeleverde compositie. Het aantal mogelijke combinaties wordt daardoor verminderd tot 602.769.
  - geval 3: Het getalsymbool 41 van J.S. Bach wordt verondersteld altijd voor te komen, resulterend in 103.635 combinaties. Het zou vreemd zijn als Bach's getalsymbool ontbreekt, terwijl symbolen van de andere leden van de Societät wel aanwezig zijn.
  - geval 4: De voorwaarden van geval 2 en 3 zijn beide van kracht, waardoor het aantal combinaties wordt beperkt tot 43.020.

Met behulp van een computerprogramma zijn alle combinaties van maatgetallen voor de vier gevallen berekend, waarbij het aantal gevonden getsymbolen voor iedere combinatie is vastgesteld. Het resultaat hiervan is weergegeven in de onderstaande tabel 3.

aantal gevonden getsymbolen s	geval 1	geval 2	geval 3	geval 4
0	242.042	31.466	0	0
1	614.981	98.597	8.369	2.248
2	750.177	144.473	22.229	7.215
3	625.601	143.848	26.792	10.744
4	382.230	102.005	23.046	10.470
5	175.327	53.543	14.246	7.254
6	60.338	21.040	6.278	3.461
7	15.616	6.281	2.085	1.266
8	2.937	1.289	512	304
9	401	209	71	53
10	32	17	6	5
11	3	1	1	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
totaal aantal maatgetalcombinaties	2.869.685	602.769	103.635	43.020
gemiddelde van s	2,40	2,78	3,41	3,71
gemiddelde van s exclusief J.S. Bach	2,37	2,71	2,41	2,71
standaarddeviatie van s	1,49	1,55	1,47	1,49
kans op $s \geq 10$	0,00122%	0,00299%	0,00675%	0,0116%
aantal maal 41 (J.S. Bach) bij $s \geq 10$	7	6	7	5

tabel 3

In de tabel 3 is het aantal maatgetalcombinaties weergegeven, waarbij eenzelfde aantal getsymbolen  $s$  is vastgesteld. Dit aantal  $s$  varieert van 0 - 11 in de gevallen 1 en 2, van 1 - 11 in geval 3 en van 1 - 10 in geval 4. Bij de gevallen 3 en 4 is het aantal gevonden getsymbolen altijd groter dan 0, omdat de combinaties hier op de aanwezigheid van Bach's getsymbool 41 zijn geselecteerd.

Tabel 3 geeft eigenlijk aan, hoe de aantallen gevonden symbolen  $s$  over de maatgetalcombinaties zijn verdeeld. Bij geval 1 bijvoorbeeld worden gemiddeld 2,40 getsymbolen per combinatie gevonden, waarbij de aantallen  $s = 2$  en  $s = 3$  het vaakst worden aangetroffen. De standaarddeviatie van  $s$  (2,37 in geval 1) geeft een maat voor de spreiding van het aantal gevonden getsymbolen per combinatie. Om het gemiddelde van  $s$  bij de vier gevallen goed te kunnen vergelijken, is dit ook berekend voor alle getsymbolen met uitsluiting van het getsymbool 41 van J.S. Bach. Bij geval 3 en 4 komt Bach's getsymbool immers altijd voor, terwijl dit niet zo is bij geval 1 en 2.

In de onderstaande tabel 4 is de kans weergegeven, dat een bepaald getsymbool wordt aangetroffen in elk van de vier gevallen.

lid Societät	getsymbool	percentage aanwezigheid (%) van een bepaald getsymbool					
		geval 1		geval 2		geval 3	geval 4
G. LUCCHESINI	106	8,22	8,35	7,39	7,58	5,78	6,16
L.C. MIZLER	92	8,58	8,71	8,52	8,75	8,00	8,64
G.H. BUEMLER	87	8,52	8,65	8,44	8,66	8,95	8,73
C.G. SCHROETER	116	7,33	7,44	5,25	5,38	4,46	5,40
H. BOKEMEYER	101	8,31	8,43	8,03	8,25	8,22	8,65
G.P. TELEMANN	101	8,31	8,43	8,03	8,25	8,22	8,65
G.H. STOELZEL	122	6,53	6,63	3,66	3,75	3,63	3,98
G.F. LINGKE	68	6,30	6,39	8,10	8,32	9,84	8,33
M. SPIESS	95	8,42	8,54	8,41	8,63	8,14	8,93
G. VENZKY	102	8,43	8,56	7,98	8,19	8,22	8,56
U. WEISS	91	8,44	8,57	8,46	8,68	7,90	8,42
G.F. HAENDEL	60	4,75	4,83	7,13	7,31	8,71	7,05
C.H. GRAUN	69	6,36	6,46	8,04	8,25	9,94	8,49
J.S. BACH	41	1,50		2,56			
Totaal %		100,00	99,99	100,00	100,00	100,01	99,99

tabel 4

In tabel 4 is geen percentage voor het getalsymbool 41 van J.S. Bach gegeven bij geval 3 en 4. Deze gevallen zijn geselecteerd op de aanwezigheid van Bach's getalsymbool, zodat vermelding van een percentage niet relevant is.

Bij de gevallen 1 en 2 zijn twee kolommen met percentages afgebeeld. De linker kolom geeft de kans op één van de 14 getalsymbolen, inclusief dat van Bach. De rechter kolom geeft de kans op een bepaald getalsymbool, waarbij Bach's symbool niet is meegeteld. Op deze wijze zijn de percentages in de rechter kolommen van de gevallen 1 en 2 vergelijkbaar met de percentages van de gevallen 3 en 4.

### Gevolgtrekkingen uit de analyse

1. Uit tabel 3 blijkt, dat het aantal maatgetalcombinaties, waarbij eenzelfde aantal getalsymbolen  $s$  wordt aangetroffen, bij  $s \geq 3$  kleiner wordt bij toenemende waarde van  $s$ . De kans op een bepaald aantal te vinden getalsymbolen neemt sterk af, als dit aantal groter is.
2. Omdat bij Bach's eigen maatgetalcombinatie (18, 23, 27, 42, 56) maar liefst 10 getalsymbolen worden aangetroffen, is bij deze analyse de kans berekend, dat 10 of meer symbolen worden gevonden. Deze kans is 0,012% (exact 1 : 8.604) in het geval dat Bach's eigen getalsymbool aanwezig wordt verondersteld en het totaal aantal maten tussen 152 en 180 ligt (geval 4).
3. In alle gevallen is het aantal combinaties, waarbij ten minste 10 getalsymbolen worden gevonden, inclusief Bach's symbool 41, ten hoogste gelijk aan 7. Met andere woorden: van de 2.869.685 mogelijke maatgetalcombinaties zijn er slechts 7, waarbij behalve het getalsymbool van J.S. Bach nog 9 of meer getalsymbolen van andere leden van de Societät kunnen worden gevormd. Eén van deze 7 mogelijkheden levert zelfs 11 getalsymbolen, maar dit kan slechts gerealiseerd worden bij een totaal aantal van 143 maten. Deze 7 maatgetalcombinaties en de realisatie van de 10 of 11 getalsymbolen zijn opgenomen in tabel 5.
4. De tabel 5 maakt duidelijk, dat om 10 of 11 getalsymbolen te kunnen verkrijgen, de aanwezigheid van de twee maatgetallen 18 en 23 noodzakelijk is. Daarbij wordt het getalsymbool 41 van J.S. Bach steeds gerealiseerd als som van deze maatgetallen. De door Bach gekozen combinatie met 166 maten (gekleurd weergegeven) is hier een voorbeeld van.
5. Uit tabel 4 blijkt, dat de kans om Bach's symbool 41 te verkrijgen, van alle getalsymbolen verreweg het kleinst is (1,50% in geval 1 en 2,56% in geval 2). De oorzaak hiervan is het feit, dat dit getalsymbool klein is vergeleken met de andere symbolen, zodat dit (bij een minimum van 16 maten per muziekstuk) met aanzienlijk minder maatgetalcombinaties realiseerbaar is. Ditzelfde geldt in mindere mate ook voor het getalsymbool 60 van G.F. Händel. Wordt echter Bach's getalsymbool aanwezig verondersteld (geval 3 en 4), dan leidt de daardoor veroorzaakte hogere frequentie van kleinere maatgetallen ertoe, dat Händel's getalsymbool veel gemakkelijker te realiseren is. Daarentegen heeft het getalsymbool 122 van G.H. Stölzel dan juist weer een kleinere kans om te worden gevormd.
6. Als er minstens 10 getalsymbolen zijn vereist, komt het getalsymbool van C.G. Schröter alleen voor bij een totaal aantal van 166 maten (Bach's keuze). Het getalsymbool van M. Spieß ontbreekt hier juist, terwijl het bij de andere 6 maatgetalcombinaties altijd aanwezig is. Zie hiervoor de onderstaande tabel 5.

## Slotconclusie

Als Bach het voornemen zou hebben gehad, de getalsymbolen van zijn eigen naam en die van 9 andere leden van de Societät via eenvoudige addities van maatgetallen mogelijk te maken, dan had hij slechts de beschikking over een zeer gering aantal mogelijke maatgetalcombinaties.

Indien de aanwezigheid van de 10 getalsymbolen in de Canonische Veränderungen aan het toeval wordt toegeschreven, dan is de kans daarop, volgens de uitgangspunten van deze analyse, kleiner of gelijk aan 1 : 8.604.

tabel 5: De enig mogelijke maatgetalcombinaties met 10 of 11 getalsymbolen van de leden van de Societät.

lid Societät	getal- symb.	143 maten (18, 19, 23, 33, 50)	151 maten (18, 23, 27, 41, 42)	155 maten (18, 23, 31, 37, 46)	166 maten (18, 23, 27, 42, 56)	170 maten (18, 19, 23, 50, 60)	174 maten (18, 19, 23, 50, 64)	179 maten (18, 23, 37, 50, 51)
G. LUCCHESINI	106	23 + 33 + 50	23 + 41 + 42	23 + 37 + 46	23 + 27 + 56		19 + 23 + 56	18 + 37 + 51
L.C. MIZLER	92	19 + 23 + 50	23 + 27 + 42	18 + 23 + 46	23 + 27 + 42	19 + 23 + 50	19 + 23 + 50	18 + 23 + 51
G.H. BUEMLER	87	18 + 19 + 50	18 + 23 + 41		18 + 27 + 42	18 + 19 + 50	18 + 19 + 50	37 + 50
C.G. SCHROETER	116				18 + 42 + 56			
H. BOKEMEYER	101	18 + 33 + 50	18 + 41 + 42	18 + 37 + 46	18 + 27 + 56	18 + 23 + 60	18 + 19 + 64	50 + 51
G.P. TELEMANN	101	18 + 33 + 50	18 + 41 + 42	18 + 37 + 46	18 + 27 + 56	18 + 23 + 60	18 + 19 + 64	50 + 51
G.H. STOELZEL	122							
G.F. LINGKE	68	18 + 50	18 + 23 + 27	31 + 37	18 + 23 + 27	18 + 50	18 + 19 + 23	18 + 50
M. SPIESS	95							
G. VENZKY	102	19 + 33 + 50				19 + 23 + 60		
U. WEISS	91	18 + 23 + 50	23 + 27 + 41	23 + 31 + 37		18 + 23 + 50	18 + 23 + 50	18 + 23 + 50
G.F. HAENDEL	60	18 + 19 + 23	18 + 42	23 + 37	18 + 42	18 + 19 + 23	18 + 19 + 23	23 + 37
C.H. GRAUN	69	19 + 50	27 + 42	23 + 46	27 + 42	19 + 50	19 + 50	18 + 51
J.S. BACH	41	18 + 23	18 + 23	18 + 23	18 + 23	18 + 23	18 + 23	18 + 23